14 mai 2020

3.1 Opérateur adjoint d'un opérateur linéaire continu

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$- espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace normé des opérateurs linéaires et continus de F dans F.

Lemme 3.1 Pour tout $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et pour toute $g \in F'$, l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par

$$f(x) = g(Tx) \quad , \quad x \in E$$

est une fonctionnelle linéaire continue i.e., $f \in E'$.

Preuve

- La linéarité de f s'ensuit de

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = g(T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2))$$

$$= \alpha_1 g(Tx_1) + \alpha_2 g(Tx_2)$$

$$= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad \text{pour tout } x_1, x_2 \in E$$

et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

De plus l'inégalité

$$|f(x)| = |g(Tx)| \leq \|g\|_{E'} \ \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|x\|_E$$

entraine que

$$\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{E'} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)},$$

i.e, f est continue.

Théorème 3.1 L'application $S : F' \longrightarrow E'$ donnée par

$$g \longmapsto S(g) = f$$

au sens du lemme 3.1 est un opérateur linéaire continu. De plus, on a pour $x \in E$ $S(g)(x) = f(x) = g(Tx)$.

Preuve Vérifions d'abord que T est bien défini. En effet pour tout $x \in E$

De plus S est continu puisque pour tout $x \in E$

$$|S(g)(x)| = |g(Tx)| \leq \|g\| \|T\| \|x\|.$$

On conclut que S est continu et $\|S\| \leq \|T\|$.

Définition 3.1 L'opérateur S est appelé l'opérateur adjoint de l'opérateur T et est noté T^*.

Opérateur adjoint dans le cadre hilbertien.

Proposition 3.1 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tel que pour tout $x \in H_1$ et tout $y \in H_2$, on ait

$$(Tx, y)_{H_2} = (x, T^*y)_{H_1}.$$

De plus $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2, H_1)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$.

Preuve

Pour tout $y \in H_2$, l'application $\varphi_y : x \longmapsto (Tx, y)_{H_2}$ est une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément noté $a_y \in H_1$ tel que pour tout $x \in H_1$

$$\varphi_y(x) = (Tx, y)_{H_2} = (x, a_y)_{H_1}.$$

En égard à l'unicité de a_y, on définit une application $B : \begin{array}{l} H_2 \longrightarrow H_1 \\ y \longmapsto a_y \end{array}$

- B est linéaire. En effet, soient $y_1, y_2 \in H_2$, $\lambda \in K$, $y = y_1 + \lambda y_2$

$$By = B(y_1 + \lambda y_2) = a_y$$

Alors pour tout $x \in H_1$

$$\begin{aligned}(x, B(y_1 + \lambda y_2)) = (x, a_y) &= (Tx, y_1 + \lambda y_2) \\ &= (Tx, y_1) + \bar{\lambda}(Tx, y_2) \\ &= (x, By_1) + \bar{\lambda}(x, By_2) \\ &= (x, By_1 + \lambda By_2).\end{aligned}$$

D'où $B(y_1 + \lambda y_2) - By_1 + \lambda By_2 \in H^\perp = \{0\}$, d'où T est linéaire

30 mai 2020

T^* est borné. En effet soit $x \in H_1$, et $y \in H_2$ avec $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$.

$$|(x, T^*y)|_{H_1} \leq |(Tx, y)|_{H_2} \leq \|Tx\|_{H_2} \|y\|_{H_2}$$

$$\leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$$

En prenant $x = \dfrac{T^*y}{\|T^*y\|_{H_2}}$, pour tout $y \in H$, $\|y\| \leq 1$ et $T^*y \neq 0$,

on a :

$$\|T^* y\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$$

si $y \in H$ tel que $T^*y = 0$ l'inégalité précédente est encore vérifiée

On obtient donc $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2, H_1)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$ et T^* est borné.

- Unicité si T_1^* et T_2^* vérifient

$$(Tx, y) = (x, T_1^* y) = (x, T_2^* y), \text{ pour tout } x \in H_1 \text{ et tout } y \in H_2,$$

il s'ensuit que

$$(x, (T_1^* - T_2^*) y) = 0, \text{ pour tout } x \in H_1 \text{ et } y \in H_2$$

donc $T_1^* - T_2^* = 0$

Définition 3.2 (Adjoint) L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ est appelé l'adjoint de l'opérateur T.

Exemple. Pour tout espace de Hilbert H : $Id_H^* = Id_H$

Proposition 3.2 (Propriétés algébriques de l'adjoint)

Soient $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $T' \in$
$T' \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$

1) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

2) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

3) $(T' \cdot T_1)^* = T_1^* \cdot T'^*$

4) $(T^*)^* = T$

5) Si T admet un inverse borné T^{-1}, T^* admet aussi un inverse borné et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

4)

Preuve

29 mai 2020

Preuve

1) Pour tout $x \in H_1$ et tout $y \in H_2$

$$(x,(T_1+T_2)^*y)_{H_1} = ((T_1+T_2)x,y)_{H_1} = (T_1x + T_2x, y)$$

$$= (T_1x,y) + (T_2x,y) = (x, T_1^*y) + (x, T_2^*y)$$

$$= (x, T_1^*y + T_2^*y).$$

2) Pour tout $x \in H_1$, et tout $y \in H_2$

$$(x, (\lambda T)^* y) = (\lambda T x, y) = (Tx, \bar{\lambda} y) = (x, \bar{\lambda} T^* y).$$

3) Pour tout $x \in H_1$, et tout $z \in H_3$

$$(x, (T'T)^* z) = (T'Tx, z) = (Tx, (T')^* z)$$

$$= (x, T^*(T')^* z)$$

4) Pour tout $x \in H_1$ et tout $y \in H_2$,

$$(Tx, y) = (x, T^*y) = \overline{(T^*y, x)} = \overline{(y, (T^*)^* x)} = ((T^*)^* x, y)$$

5) On a $TT^{-1} = Id_{H_1}$ par passage à l'adjoint :

$$\begin{cases} (T^{-1})^* T^* \quad T^{-1}T = Id_{H_2} \\ (T T^{-1})^* = Id_{H_1}^* = Id_{H_1} \\ T^*(T^{-1})^* = Id_{H_2}. \end{cases}$$

d'où $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Proposition 3.4 Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors

1) $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$,

2) $\|T^*T\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)}$.

Preuve 1) D'après la démonstration de la proposition $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$

D'autre part $\|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$, d'où le résultat.

$$\|T\| \leq \|T^*\|$$

2) On a $\|T^*T\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|T^*\| \|T\| = \|T^2\|_{\mathcal{L}(H)}$

Réciproquement si $x \in H$, $\|x\| = 1$.

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x)$$

$$\leq \|T^*T\|_{\mathcal{L}(H)},$$

donc $\|T^2\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|T^*T\|_{\mathcal{L}(H)}$.

3 juin 2020
Sous confinement à cause de covid-19

Proposition 3.5 (Propriétés géométrique de l'adjoint)

Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ Alors

1) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$. 2) $(\operatorname{Ker} T^*)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} T}$.

Preuve

1) Soit $x \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ ce qui équivalent à $(x, Tz) = 0$, pour tout $z \in H$, c.à.d $(T^* x, z) = 0$, i.e, encore $T^* x = 0$, c'est équivalent à $x \in \operatorname{Ker} T^*$.

2) On a $(\operatorname{Ker} T^*) = \operatorname{Im} T^{\perp} \Leftrightarrow (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp} = ((\operatorname{Im} T)^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} T}$.

Définition 3.3 Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit auto-adjoint lorsque $T = T^*$ c.à.d. que T est auto adjoint si et seulement si

$$(Tx, y) = (x, Ty), \text{ pour tout } x, y \in H$$

Exemple L'opérateur identité $I_{d_H} : H \to H$ est auto-adjoint

$$Id_H^* = Id_H.$$

Proposition 3.6 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors pour tout $x \in H$, $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ et

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup \{ |(Tx, x)| , \|x\| = 1 \}$$

3.2 Spectre d'un opérateur borné

Dans toute la suite $(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{C}$- espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$.

Notation : Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $T - \lambda = T - \lambda Id_E$ où Id_E est l'application linéaire identité de $\mathcal{L}(E)$.

3.2.1 Spectre - Résolvante

Définition 3.4 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de T est la partie de $\mathbb{C}$ notée $\sigma(T)$ et définie par

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda Id_E \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{L}(E)\}$$

- Les éléments de $\sigma(T)$ sont appelés valeurs spectrales.

Remarque

On remarque par le théorème de l'isomorphisme, T est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si T est bijectif. D'où on en déduit la caractérisation suivante du spectre d'un opérateur borné.

Proposition 3.7 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'est pas bijectif}\}.$$

Définition 3.5 On appelle spectre continu de l'opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ et on note $\sigma_p(T)$, l'ensemble des valeurs propres de T i.e.

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}.$$

- Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$.
  - Un vecteur $u \in E$ non nul tel que $Tu = \lambda u$ est appelé vecteur propre de T associé à la valeur propre λ.
  - On appelle multiplicité de la valeur propre λ, la dimension (finie ou infinie) de $Ker(T - \lambda I)$.

15 Juillet 2020

Définition 3.6 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$

- On appelle spetre résiduel de T et on note $\sigma_r(T)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \notin \sigma_p(T)$ et l'image de $(T-\lambda I)$, $R(T-\lambda I)$ est dense dans E, i.e.,
$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ est injectif et } \overline{R(T-\lambda I)} \neq E\}.$$

- On appelle spectre continu de T et on note $\sigma_c(T)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \notin \sigma_p(T)$ et $R(T-\lambda I)$ est dense dans E
$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ est injectif et } \overline{R(T-\lambda I)} \neq E\}.$$

Remarque

- L'ensemble $\sigma(T)$ se décompose en ~~dé~~ unions disjointes
$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$

- Concers les spectre résiduel et continu on a un défaut majeur de la surjectivité même en prenant l'adhérence de l'image on ne trouve pas E. Pour le spectre continu l'inverse est bien défini sur un ensemble dense, mais n'est pas borné.

Lemme 3.2 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Alors $Id_E - T$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n$.

2) De plus, l'ensemble des opérateurs inversible dans $\mathcal{L}(E)$ noté $GL(E)$ est un ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

Preuve

2) Soit $T_0 \in GL(E)$, montrons que $T_0 \in B(T_0, \|T_0^{-1}\|^{-1}) \subset GL(E)$

où $B(T_0, \|T_0^{-1}\|^{-1})$ est la boule ouverte de centre T_0 et de rayon $r = \|T_0^{-1}\|^{-1}$ dans $\mathcal{L}(E)$. En effet soit $T \in B(T_0, \|T_0^{-1}\|^{-1})$, on a $T = T_0 + T - T_0 = T_0(I - (I - T_0^{-1}T))$.

De plus $\|I - T_0^{-1}T\| = \|T_0^{-1}(T_0 - T)\| \leq \|T_0^{-1}\| \|T_0 - T\|$.

15 Juillet 2020

D'où

$$\|I - T_0^{-1}T\| \leq \|T_0^{-1}\| \cdot \|T_0 - T\| < \|T_0^{-1}\| \cdot \|T_0^{-1}\|^{-1} = 1$$

et donc $T_0^{-1}T = I - (I - T_0^{-1}T)$ est inversible. Par suite T est inversible i.e $T \in GL(E)$, donc $GL(E)$ est ~~un~~ ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Définition 3.7 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ est appelé ensemble résolvant de T. Si $\lambda \in \rho(T)$, λ est dite valeur régulière de l'opérateur T. et $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ est d'de l'application linéaire résolvante de T au point λ.

Proposition 3.8 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $|\lambda| > \|T\|$ alors $\lambda \in \rho(T)$. En particulier, on a $\sigma(T) \subset \overline{D(0, \|T\|)}$
2. $\rho(T)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.
3. $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Preuve

1) Posons $T_1 = \frac{1}{\lambda} T$, alors $\|T_1\| = \frac{1}{|\lambda|} \|T\| < 1$
donc $(T_1 - I)^{-1} = (\frac{1}{\lambda} T - I)^{-1}$ existe et il est borné. Donc $(T - \lambda I)^{-1}$ existe et il est borné, c.à.d $\lambda \in \rho(T)$.

2) Soit φ l'application $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$
$\lambda \longmapsto \varphi(\lambda) = T - \lambda I$.

Alors $\rho(T) = \varphi^{-1}(GL(E))$.

D'autre part pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)\| = \|(\lambda - \mu) I\| \leq |\lambda - \mu|,$$

donc φ est continue. Or d'après le ~~proposition~~ lemme 3.2 $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. Ainsi $\rho(T) = \varphi^{-1}(GL(E))$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

3) D'après 2 $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ est fermé et est borné d'après 1) donc compact.

Définition 3.8 Soient $T \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. L'application

$$R(T) : \rho(T) \longrightarrow \mathcal{L}(E), \quad \lambda \longmapsto T - \lambda I$$ définie par $R(T)(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$

est appelée résolvante de l'opérateur T.

Pour $\lambda \in \rho(T)$, l'application linéaire $R_\lambda(T) = R(T)(\lambda) = T - \lambda I$ est appelée résolvante de T au point λ.

Proposition 3.9 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. La résolvante de $T : \lambda \longrightarrow R_\lambda(T)$ est analytique sur $\rho(T)$. De plus $\lim\limits_{|\lambda| \to +\infty} \|R_\lambda(T)\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$

Preuve Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$. Alors, pour tout $\lambda \in \rho(T)$,

$$(T - \lambda)^{-1} = (T - \lambda_0 - (\lambda - \lambda_0))^{-1} = (T - \lambda_0)^{-1}\left(I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\right)^{-1}$$

Alors, si on suppose que $\lambda \in \rho(T)$ est tel que $|\lambda - \lambda_0| < \|(T - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}$ on a

$$(T - \lambda)^{-1} = (T - \lambda_0)^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (T - \lambda_0)^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (T - \lambda_0)^{-(n+1)}.$$

Donc $\lambda \longmapsto R_\lambda(T)$ est analytique au point λ_0 donc sur $\rho(T)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Supposons $|\lambda| > \|T\|$. Alors $\lambda \in \rho(T)$ et

$$(T - \lambda)^{-1} = \left(-\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda} T\right)\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^n} T^n.$$

d'où

$$\|(T - \lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^n} \|T\|^n$$

$$\leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} 0.$$

Proposition 3.10 (identité de la résolvante)

Soient $T \in \mathcal{L}(E)$, λ et λ' dans $\rho(T)$. Alors

$$R_\lambda(T) - R_{\lambda'}(T) = (\lambda - \lambda') R_\lambda(T) . R_{\lambda'}(T).$$

De plus $R_\lambda(T)$ et $R_{\lambda'}(T)$ commutent.

Preuve

- Pour tout $\lambda, \lambda' \in \rho(T)$, on a

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) - R_{\lambda'}(T) &= (T-\lambda)^{-1} - (T-\lambda')^{-1} \\ &= (T-\lambda)^{-1}(T-\lambda')(T-\lambda')^{-1} - (T-\lambda)^{-1}(T-\lambda)(T-\lambda')^{-1} \\ &= (T-\lambda)^{-1}\left(T-\lambda'-T+\lambda\right)(T-\lambda')^{-1} \\ &= (\lambda-\lambda') R_\lambda(T) R_{\lambda'}(T). \end{aligned}$$

- En interchangeant λ et λ', on en déduit que $R_\lambda(T)$ et $R_{\lambda'}(T)$ commutent.

Définition 3.1 (Rayon spectral) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On appelle rayon spectral de T le réel positif $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

Proposition 3.11 (Formule du rayon spectral)

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors $r(T) = \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Proposition 3.12 Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$. De plus pour tout $\lambda \in \rho(T)$, $R_{\bar{\lambda}}(T^*) = (R_\lambda(T))^*$.

Preuve

- On a $T-\lambda$ est inversible si et seulement si $(T-\lambda)^*$ l'est.
  Or $(T-\lambda)^* = T^* - \bar{\lambda}$. Donc
  $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow T-\lambda$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow (T-\lambda)^* = T^* - \bar{\lambda}$ n'est pas inversible
  $\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

- D'autre part. Si $\lambda \in \rho(T)$, on a

$$R_{\bar\lambda}(T^*) = (T^* - \bar{\lambda})^{-1} = \left((T-\lambda)^*\right)^{-1} = \left((T-\lambda)^{-1}\right)^* = (R_\lambda(T))^*.$$