

Corrigé de la Serie n°3Exercice 1

- Soit f continue et $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ et (x_n) une suite d'éléments de H , i.e., $f(x_n) = \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$ qui converge vers $x \in E$

Comme f est continue, on a $f(x) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \alpha$

donc $x \in H$, d'où H est fermé.

- Réciproquement, supposons que H est fermé. Le complémentaire de H , C_H est un ouvert non vide (puisque $f \neq 0$ si $f=0$ $f(x)=0 \forall x \in E$! donc $\{x \in H : f(x)=\alpha\} = \emptyset$)
Soit $x_0 \in C_H$ et que $f(x_0) < \alpha$ (on peut supposer $f(x_0) < \alpha$ ce serait pareil)

Soit $r > 0$ tq $B(x_0, r) \subset C_H$ où $B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$

On a $f(x) < \alpha$, $\forall x \in B(x_0, r)$. En effet supposons que $f(x_1) > \alpha$ pour un certain $x_1 \in B(x_0, r)$. Le segment

$$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1; t \in [0, 1]\} \subset B(x_0, r)$$

est donc $f(x_t) \neq \alpha$, $\forall t \in [0, 1]$

Par ailleurs pour $0 < t = \frac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)} < 1$

$$f(x_t) = \frac{-\alpha + f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_0) + \frac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

$$= \frac{-f(x_0) + \alpha}{f(x_1) - f(x_0)} (f(x_0)) + \frac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

$$= \alpha \frac{f(x_0) - f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} + \frac{f(x_1)^2 - f(x_0)^2}{f(x_1) - f(x_0)} = f(x_1) + f(x_0) - \alpha$$

pour $t = \frac{1}{2}$ $f(x_1) - f(x_0) = 2f(x_1) - 2\alpha$ i.e., $f(x_1) + f(x_0) = 2\alpha$

c.à.d. $f(x_t) = \alpha$ ce qui est absurde. Il résulte que

$\forall x \in B(x_0, r)$ pour tout $x \in B(x_0, r) = x_0 + r B(0, 1)$

i.e. $f(x_0 + rz) < \alpha$, pour tout $z \in B(0, 1)$

$$\Rightarrow f(x_0) + r f(z) < \alpha.$$

$$\text{soit } f(z) < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0)), \text{ pour tout } z \in B(0,1)$$

Comme $-z \in B(0,1)$, on a

$$\sup |f(z)| < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0))$$

$$\text{soit } \|f\| < \frac{1}{r} (\alpha - f(x_0)).$$

Soit $G_{\mathbb{R}}$ le sous-espace vectoriel réel sous-jacent à G .
 Il est clair que $u: G_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto u(x) = \operatorname{Re} g(x)$$

est une forme linéaire réelle de plus

De plus pour tout $x \in G$, $u(ix) = u(x) - i u(ix)$. En effet
 on a

$$u(ix) = \operatorname{Re} g(ix) = \operatorname{Re} i g(x) = -\operatorname{Im} g(x)$$

D'autre part, on a

$$u(x) \leq |u(x)| \leq |g(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

Ainsi, il s'avère que u vérifie les conditions du théorème
 de Hahn-Banach forme analytique réelle. Par conséquent, il existe
 une $\mathbb{R}$ -forme linéaire $v: E \rightarrow \mathbb{R}$ prolongeant u à E tout
 entier et vérifiant

$$v(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E$$

Posons maintenant

$$f(x) = v(x) - i v(ix)$$

f est une forme $\mathbb{C}$ -linéaire, pour le voir il suffit de
 vérifier que, $\forall x \in E$ $f(ix) = i f(x)$

On a

$$f(ix) = v(ix) + i v(x) = i (v(x) - i v(ix)) = i f(x)$$

Evidemment f est une forme linéaire de E dans $\mathbb{C}$ qui
 coïncide avec g sur G . Montrons-nous que

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in E$$

Pour ce faire. Écrivons

$$f(x) = |f(x)| e^{i\theta}, \quad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } |f(x)| &= \bar{e}^{i\theta} f(x) = f(\bar{e}^{i\theta} x) = \operatorname{Re} f(\bar{e}^{i\theta} x) \\ &= v(\bar{e}^{i\theta} x) \leq p(\bar{e}^{i\theta} x) = p(x). \end{aligned}$$

Exercice 3

serie n° 3

1) On pose $p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|$

On a $f(x) \leq \|g\|_{G'} \|x\| = p(x), \forall x \in G$

d'après le théorème de Hahn Banach forme, il existe une

forme linéaire $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$

soit $f(x) \leq \|g\|_{G'} \|x\|$

et $f(-x) \leq \|g\|_{G'} \|-x\|$ i.e $|f(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\|$

c.a.d $\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}$

d'autre part $|f(x)| = |g(x)| \text{ sur } G$

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| \geq \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)| = \|g\|_{G'}$$

2) Soit $G = \mathbb{R}x_0 = \{ \lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R} \}$ et soit $g: G \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lambda x_0 \mapsto g(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|^2$$

g est une forme linéaire continue sur G . En effet

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, |g(\lambda x_0)| = |\lambda| \|x_0\|^2 = |\lambda| \|x_0\| \|x_0\|$$

$$\text{soit } \|g\|_{G'} \leq \|x_0\|$$

$$\text{d'autre part par } \begin{cases} x_0 = \frac{1}{\|x_0\|} \\ \text{et } y_0 = \lambda_0 x_0 \end{cases} : |g(y_0)| = g\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) = \|x_0\|$$

$$\text{soit } \|g\|_{G'} = \|x_0\|$$

A présent d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge g telle $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} = \|x_0\|$

Supposons que $x \neq 0$. Il est clair que

$$\sup_{f \in E'} |f(x)| \leq \|f\|_{E'} \cdot \|x\| \leq \|x\|.$$

$$f \in E'$$

$$\|f\| \leq 1$$

D'autre part d'après la question 2, il existe $f_0 \in E'$ tq

$$\|x\| = \|f_0\|_{E'} \quad \text{et} \quad f_0(x) = \|x\|_{E'}^2.$$

On pose $f_1 = \|x\|^{-1} f_0$ de sorte que $\|f_1\|_{E'} = 1$

$$\text{On a} \quad f_1(x) = \|x\|^{-1} f_0(x) = \|x\|. \quad \text{c.q.f.d.}$$

Exercice 4

Soit $\varepsilon > 0$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon) \quad \text{et} \quad B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$$

où $B(0, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε .

Vérifions que A_ε et B_ε sont :

i) convexes

ii) ouverts

iii) disjoints.

En effet

i) A_ε et B_ε sont convexes puisque chacun des deux représente une somme de deux convexes.

ii) Ouverts puisque, on peut écrire

$$A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} \{x + B(0, \varepsilon)\} \quad (\text{resp. } B_\varepsilon = \bigcup_{x \in B} \{x + B(0, \varepsilon)\})$$

iii) Disjoints pour un $\varepsilon > 0$ assez petit. En effet si ce n'était pas le cas, alors $\forall \varepsilon > 0, A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$.

En particulier pour $\varepsilon = 2^{-n}$, on pourrait construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n = a_n + 2^{-n} v_n = b_n + 2^{-n} w_n, n \in \mathbb{N}$

avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$
 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(0, \frac{1}{2})$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(0, \frac{1}{2})$

6 Juillet 2020
 série 3

Comme B est compacte, on peut extraire une sous-suite (b_{n_k}) de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $b \in B$.

Par conséquent $a_{n_k} = b_{n_k} + 2^{-n_k} (v_{n_k} - w_{n_k}) \rightarrow b$

puisque $\|2^{-n_k} (v_{n_k} - w_{n_k})\| \leq 2^{-n_k} (\|v_{n_k}\| + \|w_{n_k}\|) \leq 2^{-n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

A étant, alors $b \in A$, ce qui est absurde car A et B sont disjoints.

Le théorème 2.4 de Hahn-Banach affirme l'existence d'un hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ tel que
 fermé

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y), \quad \forall x \in A_\varepsilon \text{ et } \forall y \in B_\varepsilon$$

c.a.d.

$$f(a + \varepsilon z) \leq f(b + \varepsilon y), \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

soit, en prenant le sup en $z \in B(0, 1)$

$$\forall (z, y) \in B^2(0, 1)$$

à gauche et le inf en $y \in B(0, 1)$ à droite, on a :

$$f(a) + \varepsilon \|f\|_{E'} \leq \alpha \leq f(b) - \varepsilon \|f\|_{E'}$$

pour tout $a \in A$ et $b \in B$.

Exercice 5

• Si $\bar{F} = E$ et $f \in E'$ est telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$

On pour tout $x \in E \quad \exists (x_n) \subset F$ tq $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ car $\bar{F} = E$

$$\text{soit } f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = 0.$$

• Réciproquement si $\bar{F} \neq E$, alors $\exists x_0 \in E \setminus \bar{F}$.

d'après le th de Hahn-Banach seconde forme géométrique, on peut séparer le compact convexe $\{x_0\}$ du fermé convexe $\bar{F}$. Il existe donc $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $f(x_0) < \alpha < f(y)$

$\exists f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(y) < \alpha < f(x) \quad , \quad \forall y \in F$$

En particulier $\lambda f(y) < \alpha$, $\forall y \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

car F est un s.e.v , il en résulte que $f(y) = 0$ pour tout $y \in F$ et la preuve est complète