Série n°3

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel normé et f un élément de E^*. Montrer que l'hyperplan affine d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si et seulement f est continue.

Exercice 2 (Théorème de Hahn-Banach ; forme analytique complexe)
Soient E un espace vectoriel complexe, G un sous-espace de E, q une semi-norme sur E, et g une forme linéaire définie sur G satisfaisant à

$$| g(x) | \leq q(x), \forall x \in G.$$

Montrer qu'il existe une forme linéaire f définie sur E telle que

$$f_{|G} = g \text{ et } | f(x) | \leq q(x), \forall x \in G.$$

Exercice 3 Soient G un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ et $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire et continue.

1. Montrer qu'il existe $f \in E'$ qui prolonge g et telle que $\| f \|_{E'} = \| g \|_{G'}$.
2. Montrer que pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que
$$\| f_0 \|_{E'} = \| x_0 \| \text{ et } f_0(x_0) = \| x_0 \|^2 .$$
3. En déduire que pour tout $x \in E$, on a
$$\| x \| = \sup_{f \in E',\, \|f\|_{E'} \leq 1} | f(x) | .$$

Exercice 4 (Théorème de Hahn-Banach ; forme géométrique)
Soient E un espace vectoriel normé $A \subset E$ et $B \subset E$ deux sous-ensembles convexes non vides, disjoints. On suppose que A est fremé et que B est compact.
Montrer qu'il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Exercice 5 Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E. Montrer que $\bar{F} = E$ si et seulement si toute forme linéaire continue et nulle sur F est nulle sur E.

Exercice 6 (supplémentaire) Soit q une fonctionnelle sous-linéaire positive sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E.

1. Montrer que l'ensemble $C = \{x \in E ; q(x) \leq 1\}$ est une partie convexe dont l'intérieur $\mathring{C} = \{x \in E ; q(x) < 1\}$.
2. Montrer que $0 \in \mathring{C}$.
3. Quelle est la jauge associée ?

1. F. Zouyed, email :fzouyed@gmail.com, Laboratoire des Mathématiques appliquées $\mathcal{LMA}$