



## 2.2.2 Formes géométriques du Théorème de Hahn - Banach

Commençons par quelques préliminaires sur les hyperplans

Définition 2.3 Soit  $H$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel  $E$ , on dit que  $H$  est un hyperplan si la codimension de  $H$  est égale à 1  
 $\text{codim}(H) = 1$ .

Remarque:  $H$  est un hyperplan si et seulement si  $\exists a \notin H$ , tel que  
 $E = H \oplus \text{vect}\{a\}$

où  $\text{vect}\{a\}$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $a$ .

Théorème 2.3 Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Alors

1)  $H$  est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire  $f$ , non identiquement nulle, telle que  $H$  égale le noyau de  $f$ .

i.e.,  $H = \{x \in E : f(x) = 0\} = \text{Ker } f$ .

2) Un hyperplan  $H$  est ou bien fermé ou bien dense dans  $E$ .

3) Une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé

Définition 2.4 Un hyperplan affine est le translaté d'un hyperplan,

autrement dit  $H$  est un hyperplan affine de  $E$  si il existe

une forme linéaire ~~non identiquement nulle~~  $f: E \rightarrow \mathbb{K}$

et  $\alpha \in \mathbb{K}$  tels que  $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ .

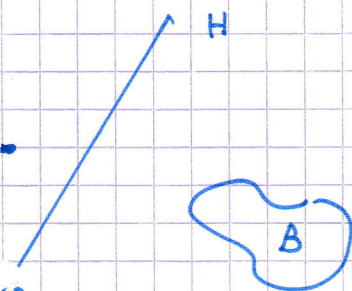
On dit que  $H$  est l'hyperplan d'équation  $f = \alpha$ .

Définition 2.5 On dit qu'un hyperplan affine  $H$  d'équation  $[f = \alpha]$

sépare deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$  si l'on a

$$\begin{cases} f(x) \leq \alpha, & \forall x \in A \\ f(x) \geq \alpha, & \forall x \in B \end{cases} \quad \begin{matrix} A \subset \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \\ B \subset \{x \in E : f(x) \geq \alpha\} \end{matrix}$$

• On dit que  $H$  sépare  $A$  et  $B$  au sens strict (ou sépare strictement  $A$  et  $B$ ) s'il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que





$$\begin{cases} f(x) \leq \alpha - \varepsilon, & \forall x \in A, \\ \text{et} \\ f(x) \geq \alpha + \varepsilon, & \forall x \in B. \end{cases}$$

### Théorème 24 (1<sup>ère</sup> forme géométrique de Hahn-Banach)

Soient  $E$  un espace vectoriel normé,  $A$  un ouvert convexe non vide,  $B$  un convexe non vide tels que  $A \cap B = \emptyset$ . Alors il existe une ~~fonction~~ un hyperplan d'équation  $[f = \alpha]$  qui sépare  $A$  et  $B$  au sens ~~large~~ large.

- La démonstration du théorème est basée sur les deux lemmes suivants.

### Lemme 22 (Jauge d'un convexe)

Soit  $C$  un convexe d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ , tel que  $0 \in C$ . On définit l'application  $p: E \rightarrow \mathbb{R}$  par  $p(x) = \inf \{ \alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C \}$ , pour tout  $x \in E$ .

Alors

1)  $p$  est bien définie

2) Il existe  $M > 0$ , tel que  $0 \leq p(x) \leq M \cdot \|x\|$ ,  $\forall x \in E$

3)  $p$  est une fonctionnelle sous-linéaire.

2)  $C = \{ x \in E : p(x) \leq 1 \}$

$p$  est dite jauge de  $C$  ou fonctionnelle de Minkowski.

Preuve

1) Comme  $0 \in C$ , il existe  $B(0, r) \subset C$ ,

d'où pour  $\rho < r$   $\bar{B}(0, \rho) \subset B(0, r) \subset C$ ,

donc  $\frac{\rho x}{\|x\|} \in B(0, r) \subset C$  pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$

Ainsi l'application  $p: E \rightarrow \mathbb{R}$  est bien définie.



$$\begin{cases} f(x) \leq \alpha - \varepsilon, & \forall x \in A \\ f(x) \geq \alpha + \varepsilon, & \forall x \in B. \end{cases}$$

### Théorème 2.4 (Hahn - Banach première forme géométrique)

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé, soient  $A, B \subset E$  deux convexes non vides et disjoints, avec  $A$  ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé d'équation  $[f = \alpha]$  qui sépare  $A$  et  $B$  au sens large.

• La démonstration du théorème 2.4 est basée sur les deux lemmes suivants.

#### Lemme 2.2 (Jauge d'un convexe)

Soit  $C$  un convexe ouvert d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  avec  $0 \in C$ . On définit l'application  $p: E \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$p(x) = \inf \{ \alpha > 0; \alpha^{-1}x \in C \}.$$

Alors : 1)  $p$  est bien définie 2)  $C = \{ x \in E : p(x) < 1 \}$

3)  $p$  est une fonctionnelle sous-linéaire

4) il existe  $M \geq 0$ , tel que  $0 \leq p(x) \leq M \cdot \|x\|, \forall x \in E$ .

#### Preuve

1)  $p$  est bien définie. En eff et

comme  $0 \in C, \exists r > 0; B(0, r) \subset C,$

d'où  $\exists 0 < \rho < r: B(0, \rho) \subset B(0, r) \subset C,$

donc pour tout  $x \in E \setminus \{0\}, \rho \frac{x}{\|x\|} \in B(0, \rho) \subset C.$

$$\begin{aligned} 2) i) \text{ Soit } \lambda > 0 \text{ et } x \in E, p(\lambda x) &= \inf \{ \alpha > 0, \lambda \alpha x \in C \} \\ &= \lambda \inf \{ \frac{\alpha}{\lambda} > 0: \frac{\alpha x}{\lambda} \in C \} \\ &= \lambda p(x). \end{aligned}$$

ii) Soient  $x, y \in E, \alpha_1, \alpha_2$  tel que  $\alpha_1^{-1}x \in C, \alpha_2^{-1}y \in C$

2) Soit  $x \neq 0, \exists \eta > 0$  tel que  $B(x, \eta) \subset C$

c.à.d  $x + \eta B(0, 1) \subset C,$

d'où  $x + \eta z \in C, \forall z \in B(0, 1) \setminus \{0\},$

En particulier  $(x + \frac{\eta}{\|x\|} x) \in C,$

i.e.  $(1 + \frac{\eta}{\|x\|})x \in C,$

ce qui implique que  $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$



Inversement soit  $x \in E$ ,  $P(x) < 1$ , donc il existe  $\alpha > 0$   $0 < \alpha < 1$  tel que  $\alpha^{-1}x \in C$  et donc  $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C$

D'où  $C = \{x \in E : P(x) < 1\}$ .

3) Prouvons maintenant que  $P$  est une fonctionnelle sous-linéaire.

i) Soit  $\lambda > 0$  et  $x \in E$ , on a

$$\begin{aligned} P(\lambda x) &= \inf \{ \alpha > 0 : \alpha \lambda x \in C \} \\ &= \lambda \inf \{ \frac{\alpha}{\lambda} > 0 : \frac{\alpha}{\lambda} x \in C \} \\ &= \lambda P(x) \end{aligned}$$

ii) Soient  $x, y \in E$  et soit  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\frac{x}{P(x) + \varepsilon} \text{ et } \frac{y}{P(y) + \varepsilon} \in C$$

Donc  $t \frac{x}{P(x) + \varepsilon} + (1-t) \frac{y}{P(y) + \varepsilon} \in C$ , pour  $t \in [0, 1]$ .

En particulier  $t = \frac{P(x) + \varepsilon}{P(x) + P(y) + 2\varepsilon}$  on obtient

$$\frac{x+y}{P(x) + P(y) + 2\varepsilon} \in C. \text{ On en déduit grâce à i) que}$$

4) Pour  $x=0$   $0 = P(0) \leq \|x\| = 0$   $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

On a  $0 \in C$  ouvert, donc  $\exists r > 0$  tel que  $B(0, r) \subset C$   
i.e.,  $r B(0, 1) \subset C$ .

D'où pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow P(x) \leq \frac{r^{-1}}{\|x\|}$$

$$\frac{r}{\|x\|} \in C \quad (r^{-1}) \frac{x}{\|x\|} \in C$$

### Lemme 2.3

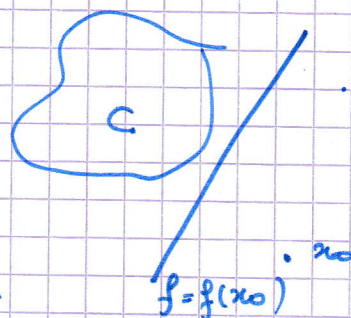
Soit  $C$  un convexe ouvert non vide d'un

IR-espace vectoriel normé et soit  $x_0 \in E \setminus C$

alors il existe (une forme linéaire continue)  $f \in E'$

telle que  $f(x) < f(x_0)$ ,  $\forall x \in C$

En particulier l'hyperplan  $[f = f(x_0)]$  sépare  $f$  et  $C$  au sens large.





Preuve On distingue deux cas

Par translation, on se ramène au cas  $0 \in C$ .

On a  $0 \in C$  ou  $C = \{x \in E, p(x) < 1\}$  avec  $p$  est la jauge.

1) 1<sup>er</sup> cas  $0 \in C$ . Soit la jauge de  $C$  notée  $p$ , on a

$$C = \{x \in E : p(x) < 1\}.$$

On considère  $G = \mathbb{R}x_0$  et la forme linéaire  $g$  définie sur  $G$  par

$$x \mapsto g(x) = g(tx_0) = t.$$

Pour tout  $x \in G$ ,  $g(x) \leq p(x)$ . En effet.

• Si  $t \geq 0$ , pour  $x \in G$ ,

$$p(x) = p(tx_0) = t p(x_0) \geq t = g(x) \text{ car } x_0 \notin C.$$

• Si  $t < 0$ ,

$$p(x) = p(tx_0) = -t p(-x_0) \geq -t p(x_0)$$

car  $p$  est une fonctionnelle sous-linéaire  $+f(-x) \geq -f(x)$

$$\text{D'où } p(x) \geq t p(x_0) \geq t = g(x).$$

- D'après le théorème il existe une forme linéaire  $f$  sur  $E$  qui prolonge  $g$  et telle que

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in E.$$

En particulier  $f(x_0) = g(x_0) = 1$ .

De plus  $f$  est continue d'après 4) du lemme 2.2.

Soit autre par, pour tout  $x \in C$ ,  $f(x) < 1$ , d'après 2)

On en déduit donc que  $f(x) < 1 = f(x_0)$ ,  $\forall x \in C$ .

2) 2<sup>ème</sup> cas  $0 \notin C$ , soit  $y_0 \in C$ , le translaté

$$C - y_0 = \{x - y_0 \in E : x \in C\}$$

est un ouvert convexe contenant l'origine et  $x_0 - y_0 \in C - y_0$

donc il existe une forme linéaire  $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que.

$$\varphi(x - y_0) = \varphi(x) - \varphi(y_0) < \varphi(x_0 - y_0) = \varphi(x_0) - \varphi(y_0)$$

ce qui démontre le lemme 2.3.



## Preuve du théorème 2.4

On pose  $C = A - B$ . On vérifie facilement que  $C$  est un convexe.  $C$  est ouvert car  $C = \bigcup_{a \in A} (a - B)$  (ou  $C = \bigcup_{b \in B} (A - b)$ )

et  $A - b$  est le translate d'un ouvert donc ouvert).

De plus  $0 \notin C$  puisque  $A \cap B = \emptyset$ . Alors d'après le lemme 2.3 il existe  $f \in E'$  tel que  $f(x) < f(0) = 0, \forall x \in C$ .   
 les translations et les homothéties sont des homéomorphismes

C'est à dire

$$f(a) < f(b), \forall a \in A, \forall b \in B$$

$$\text{On en déduit } \sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in B} f(x)$$

On peut fixer  $\alpha \in \mathbb{R}$  avec

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{x \in B} f(x).$$

Et donc l'hyperplan fermé d'équation  $[f = \alpha]$  sépare au sens large  $A$  et  $B$ .

## Théorème 2.5 (Hahn Banach - deuxième forme géométrique)

Soient  $A$  et  $B$  des sous-ensembles non vides convexes, disjoints d'un espace vectoriel normé  $E$ . On suppose que  $A$  est fermé et  $B$  est compact. Alors il existe une hyperplan fermé d'équation  $[f = \alpha]$  qui sépare  $A$  et  $B$  au sens strict.

Preuve

Soit  $\varepsilon > 0$ , on considère les ensembles suivants

$$A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon) \text{ et } B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$$

- $A_\varepsilon$  et  $B_\varepsilon$  sont convexes <sup>car</sup> comme sommes de  $A$  et  $B$  puisque chacun d'eux représente une somme de deux convexes



• Ouverts puisque  $A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} \{x + B(0, \varepsilon)\} \neq \emptyset$  resp  $B_\varepsilon = \bigcup_{x \in B} \{x + B(0, \varepsilon)\} \neq \emptyset$  5 mai 2020

• disjoints. En effet: pour un  $\varepsilon > 0$  assez petit, en effet si ce n'était pas le cas, alors:

$$\forall \varepsilon > 0, A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \neq \emptyset.$$

En particulier pour  $\varepsilon = 2^{-n}$ , on pourrait construire une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $x_n = a_n + 2^{-n} v_n = b_n + 2^{-n} w_n$  avec  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(0, 1)$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(0, 1)$ .

Comme  $B$  est compacte, on peut extraire une sous suite  $(b_{n_k})$  de  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers un certain  $b \in B$ .

Par conséquent  $a_{n_k} = b_{n_k} + 2^{-n_k} (v_{n_k} - w_{n_k}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b,$

$$\text{puisque } \|2^{-n_k} (v_{n_k} - w_{n_k})\| \leq 2^{-n_k} (\|v_{n_k}\| + \|w_{n_k}\|) \leq 2^{1-n_k}$$

$A$  étant fermé, alors  $b \in A$ , ce qui est absurde puisque  $A$  et  $B$  sont disjoints. Le théorème 2.4 montre alors l'existence d'un ~~élément~~  $f \in E'$  d'un hyperplan fermé d'équation  $[f = \alpha]$  tel que

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y), \quad \forall x \in A_\varepsilon \text{ et } \forall y \in B_\varepsilon$$

$$\text{c'est à dire } f(a + \varepsilon z) \leq f(b + \varepsilon y), \quad \forall a \in A, \forall b \in B, \forall r < \varepsilon_0$$

D'où, en prenant le sup en  $z \in B(0, 1)$  à gauche et  $\forall (z, y) \in B^+(0, 1)$

et l'inf en  $y \in B(0, 1)$  à droite, on a:

$$f(a) + \varepsilon_0 \|f\| \leq \alpha \leq f(b) - \varepsilon_0 \|f\|, \quad \forall a \in A, b \in B$$

ce qui signifie que l'hyperplan fermé  $[f = \alpha]$  sépare  $A$  et  $B$  au sens strict. (puisque  $\|f\|_{E'} > 0$ .)



## Corollaire

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $\bar{F} = E$  si et seulement la seule forme linéaire continue sur  $E$  qui s'annule sur  $F$  est la forme linéaire nulle i.e

$$\bar{F} = E \Leftrightarrow \left\{ \forall \varphi \in E' : \varphi|_F = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \right\}$$

Preuve i)  $\Rightarrow$ ) est évidente.

Réciproquement, si  $\bar{F} \neq E$ , alors il existe  $x_0 \in E \setminus \bar{F}$ .

D'après le théorème de Hahn-Banach, deuxième forme géométrique, on peut séparer le compact convexe  $\{x_0\}$  du fermé convexe  $\bar{F}$ .

Il existe donc une  $f \in E' \setminus \{0\}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tels que  $f(x_0) < f(y)$ , pour tout  $y \in \bar{F}$ . En particulier  $f(y) < \alpha$  pour tout  $y \in F$ .

ce qui implique que  $f = 0$  sur  $F$  grâce à la structure d'espace vectoriel de  $F$ .