SEMX

Introduction à la théorie des opérateurs linéaires

Chapitre 2

2.2 Le théorème de Hahn-Banach et ses corollaires

Dans ce chapitre on présente les théorèmes de Hahn-Banach ainsi que quelques applications élémentaires.

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on rappelle qu'une forme linéaire sur E est application linéaire définie de E dans $\mathbb{R}$. L'espaces des formes linéaires continues sur E noté E' est appelé dual topologique sur E. Muni de la norme $\|f\|_{E'} = \sup\limits_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} |f(x)|$, E' est un espace de Banach.

<u>Définition 2.1</u> (Fonctionnelle sous-linéaires) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle fonctionnelle sous-linéaire sur E une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que

1) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$, $\forall x, y \in E$, (sous-additivité)

2) $q(\alpha x) = \alpha q(x)$, $\forall x \in E$, $\forall \alpha \geq 0$.

<u>Exemples</u>

1) Une semi-norme sur E est une fonctionnelle sous linéaire.

2) Une forme linéaire sur E est une fonctionnelle sous-linéaire.

<u>Propriétés</u>

Une fonctionnelle sous-linéaire sur E vérifie

- $(0) = 0$, $-(-x) \leq (x)$.

En effet

$f(0) = f(0.x) = 0\, p(x) = 0$.

D'autre part $0 = p(0) = f(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x)$.

2.2.1 Formes analytiques du Théorème de Hahn-Banach

Théorème 2.1 (Hahn-Banach forme analytique) (version réelle)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $q : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle sous-linéaire sur E. Soient $G \subset E$ un sous-espace vectoriel de E et $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que

$$g(x) \leq q(x), \ \forall x \in G.$$

Alors, il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge g i.e., $f_{|G} = g$ et telle que : $f(x) \leq q(x)$, $\forall x \in E$.

- La démonstration du théorème 2.1 fait appel au lemme de Zorn dont nous rappelons l'enoncé. Commençons tout d'abord par préciser quelques notions de la théorie des ensembles ordonnés.

Définition 2.2

- Soit $\mathcal{B}$ un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$. On dit qu'un sous-ensemble $A \subset \mathcal{B}$ est totalement ordonné si pour tout couple $x, y \in A$, on a (au moins) l'une des relations $x \leq y$ ou $y \leq x$.
- On dit que $M \in \mathcal{B}$ est un majorant de A si : $\forall a \in A \ a \leq M$.
- On dit que $M_0 \in \mathcal{B}$ est un élément maximal de $\mathcal{B}$ si pour tout $x \in \mathcal{B}$ tel que $M_0 \leq x$, on a nécessairement $x = M_0$.
- Enfin, on dit que $\mathcal{B}$ est inductif si tout ensemble totalement ordonné de $\mathcal{B}$ admet un majorant.

Lemme 2.1 (Zorn) Tout ensemble ordonné inductif non vide admet un élément maximal.

Remarque Le Lemme de Zorn, bien qu'il soit algébrique a de nombreuses applications en analyse.

Preuve du théorème 2.1

On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble :

$\mathcal{P} = \{ h : h : \mathcal{D}(h) \subset E \to \mathbb{R}$ avec $\mathcal{D}(h)$ un sous-espace vectoriel de E, h linéaire $G \subset \mathcal{D}(h)$, h prolonge g et $h(x) \leq q(x) \ \forall x \in \mathcal{D}(h)$

$\mathcal{P}$ est muni de la relation d'ordre

$$h_1 \leq h_2 \iff \mathcal{D}(h_1) \subset \mathcal{D}(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1 \text{ i.e}$$

Il est clair que $\mathcal{P}$ n'est pas vide puisque $g \in \mathcal{P}$.
Vérifions que $\mathcal{P}$ est inductif. En effet soit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ un sous-ensemble totalement ordonné montrons qu'il admet un majorant. Soit $\mathcal{Q} = (h_i)_{i \in I}$. On définit l'application h par

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \quad \text{et } h(x) = h_i(x) \quad \text{si } x \in D(h_i)$$

- h est bien définie, puisque si $i \neq j$, on a par exemple $h_i \leq h_j$ i.e $\begin{cases} D(h_i)(x) \subset D(h_j) \\ h_i(x) = h_j(x), \ \forall x \in D(h_i) \end{cases}$
- De plus $\forall x \in D(h)$, $\exists i \in I$ tq $x \in D(h_i)$ d'où
$$h(x) = h_i(x) \leq q(x)$$
donc $h \in \mathcal{P}$
D'autre part $\forall i \in I$ $h_{|D(h_i)} = h_i \iff h_i \leq h$, $\forall i \in I$
c.à.d h est un majorant de $\mathcal{Q}$.

Alors $\mathcal{P}$ est non vide ordoné inductif d'après le lemme de Zorn il admet un elt maximal. noté f. Il reste à prouver que $D(f) = E$.
On raisonne par l'absurde. On suppose que $D(f) \neq E$.
Soit $x_0 \notin D(f)$, posons $D(h) = D(f) \oplus \mathbb{R} x_0$ et introduisons l'application $h : D(h)$ $h : D(h) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
pour tout $z \in D(h)$ $h(z) = h(x + t x_0) = f(z) + t\alpha$
où α est une constante réelle qui sera fixée ultérieurement de manière à ce que $h \in \mathcal{P}$. On doit donc s'assurer que

$$h(z) = f(x) + t\alpha \leq p(x + t x_0), \ \forall x \in D(f), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme q est une fonctionnelle sous-linéaire, il suffit de vérifier que
$$f(x) + \alpha \leqslant q(x + x_0), \quad \forall x \in D(f),$$
$$f(x) - \alpha \leqslant q(x - x_0) \quad \forall x \in D(f).$$

Autrement dit, il faut choisir α tel que

$$\sup_{x \in D(f)} f(x') - p(x' - x_0) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{x \in D(f)} \{ p(x + x_0) - f(x) \}.$$

Un tel choix est possible puisque :

$$f(x) + f(x') \leqslant p(x + x') = p(x + x_0 + x' - x_0)$$
$$\leqslant p(x + x_0) + p(x' - x_0).$$

On conclut donc que f est majorée par h et que $f \neq h$ ceci contredit la maximalité de f.

Théorème 22 (Hahn-Banach ~~forme~~ analytique (version complexe))

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, p, une semi-norme sur E, G un sous-espace vectoriel de E et $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ une applic forme linéaire telle que

$$|g(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in G.$$

Alors il existe $f \in E'$, telle que

i) $f_{|G} = g$

ii) $|f(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in E.$

Preuve Voir série 3.

Applications du théorème de Hahn - Banach

2.1.1 Prolongement des formes

Indiquons maintenant quelques applications simples du théorème 2.1 lorsque E est un e.v. normé (e.v.n) de norme $\|.\|$.

On désigne par E' le dual topologique de i.e l'espace des formes linéaires et continues : muni de la norme dual.

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup f(x) .$$

Lorsque $f \in E'$ et $x \in E$ on notera généralement $\langle f, x \rangle$ au lieu de $f(x)$, on dit que $\langle . , . \rangle$ est le produit scalaire dans la dualité E', E.

Corollaire 2.1 Soit G un s.e.v de E et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme

$$\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x\in G \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)| ,$$

Alors, il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tel que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} .$$

Preuve

On utilise le théorème 2.1 avec $p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|$,

$$p(\lambda x) = |\lambda| \, \|g\|_{G'} \|x\| = \lambda \|g\|_{G'} \|x\| = \lambda p(x) \quad \forall \lambda > 0 ,$$

$$p(x+y) \leq \|g\|_{G'} (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y) ,$$

De plus $g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\|_{G'} \cdot \|x\|, \quad \forall x \in G .$

Alors il existe une forme linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $f_{|G} = g$.

De plus $f(x) \leq p(x) , \quad \forall x \in E ,$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |p(x)| = \|g\|_{G'} \|x\|$$

$$\Rightarrow f \text{ est continue } \|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'} .$$

Mais comme f est un prolongement de g, on a $\|g\|_{G'} \leq \|f\|_{E'}$.

Corollaire 2.2 Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$, tel que

$$\|f_0\| = \|x_0\|_E \quad \text{et} \quad f(x_0) = \|x_0\|_E^2 .$$

Corollaire 2.3 Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |f(x)| .$$

2.2.2 Formes géométriques du Théorème de Hahn-Banach

Commençons par quelques préliminaires sur les hyperplans

<u>Définition 2.3</u> Soit H un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, on dit que H est un hyperplan si la codimension de H est égale à 1
$\operatorname{codim}(H) = 1$

Remarque: H est un hyperplan si et seulement si $\exists\, a \notin H$, tel que

$$E = H \oplus \operatorname{vect}\{a\}$$

où $\operatorname{vect}\{a\}$ est le sous-espace vectoriel engendré par a

<u>Théorème 2.3</u> Soit E un espace vectoriel normé. Alors

1) H est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire f, non identiquement nulle, telle que H égale le noyau de f.

i.e, $H = \{x \in E : f(x) = 0\} = \operatorname{Ker} f$.

2) Un hyperplan H est ou bien fermé ou bien dense dans E.

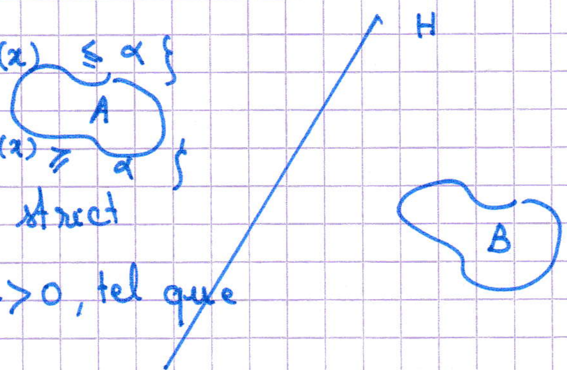
3) Une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé

<u>Définition 2.4</u>. Un hyperplan affine est le translaté d'un hyperplan, autrement dit H est un hyperplan affine de E s'il existe une forme linéaire non identiquement nulle $f : E \to \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$.

On dit que H est l'hyperplan d'équation $f = \alpha$.

Définition 2.5 On dit qu'un hyperplan affine H d'équation $[f=\alpha]$ sépare deux parties A et B de E si l'on a

$$\begin{cases} f(x) \leq \alpha, & \forall x \in A \\ f(x) \geq \alpha, & \forall x \in B \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A \subset \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \\ B \subset \{x \in E : f(x) \geq \alpha\} \end{array}$$



- On dit que H sépare A et B au sens strict (ou sépare strictement A et B) s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que

$$\begin{cases} f(x) \leq \alpha - \varepsilon, & \forall x \in A \\ \text{et} & \\ f(x) \geq \alpha + \varepsilon, & \forall x \in B \end{cases}$$

Théoreme 21 (1ère formé géométrique de Hahn-Banach)

Soient E un espace vectoriel normé, A un ouvert convexe non vide B un convexe non vide tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ qui sépare A et B au sens large.

- La démonstration du théorème est basée sur les deux lemmes suivants.

Lemme 22 (Jauge d'un convexe)

Soit C un convexe d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, tel que $0 \in C$. On définit l'application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$p(x) = \inf \{ \alpha > 0 : \alpha^{-1} x \in C \}$, pour tout $x \in E$.

Alors

1) p est bien définie

2) Il existe $M > 0$, tel que $0 \leq p(x) \leq M . \|x\|$, $\forall x \in E$

3) p est une fonctionnelle sous-linéaire.

4) $C = \{ x \in E : p(x) < 1 \}$

p est dite Jauge de C ou fonctionnelle de Minskowski.

Preuve

1) Comme $0 \in C$, il existe $B(0, r) \subset C$

d'où pour $\rho < r$ $\quad \bar{B}(0, \rho) \subset C$

$$\rho \frac{x}{\|x\|} \in B(0, r) \subset C \quad \text{pour tout } x \in E \setminus \{0\}$$

Lemme 2.3 Soit $C \subset E$ un convexe ouvert non vide et soit $x_0 \in E$ avec $x_0 \notin C$. Alors il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in C$.
En particulier l'hyperplan d'équation $[f = f(x_0)]$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Théorème 2.5 (Hahn-Banach, deuxième forme géométrique)
Soient E un espace vectoriel normé A et B deux sous-ensembles convexes de E avec non vides disjoints. On suppose que A est fermé et B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Corollaire 2.4 Soient F un sous-espace d'un espace vectoriel normé E tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tel que

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in F.$$