

Département MI
Matière : Analyse II
Année : 2012-2013 / S2

Examen de rattrapage d'Analyse II

Exercice 1 : (10 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\tan^3 x}$

2. $\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} dx$

3. $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

Exercice 2 (10 points)

1 - pour résoudre les équations d'ordre 1 du type $y = xy' + f(y')$ où f est une fonction dérivable, on fait le changement de variable $y' = t(x)$. Appliquer ceci à la résolution de $y = xy' + 2y'$.

2 - Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{1}{x} y = x \cos x$$

Corrigé de l'examen de rattrapage d'Analyse II

Exercice 1

1 - On peut écrire que

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \cdot \cos x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} \cdot \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} d(\sin x) \stackrel{u = \sin x}{=} \int \frac{1 - u^2}{u^3} du$$

$$= -\frac{1}{2u^2} - \log |u| = -\frac{1}{2\sin^2 x} - \log |\sin x| + C \quad (03,50 \text{ pts})$$

2 - On a que:

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 2)}{x^2 + 1} = \frac{x[x^2 + 1 + 1]}{x^2 + 1} =$$

$$= x + \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} dx = \int x dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C = \frac{x^2}{2} + \log \sqrt{x^2 + 1} + C \quad (03,50 \text{ pts})$$

3 - On pose $e^x = t \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$$\Rightarrow \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{t}{1 + t^2} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= \operatorname{Arctg} t + C = \operatorname{Arctg} e^x + C. \quad (03,00 \text{ pts})$$

Exercice 2

1. $y = xy' + 2y' \quad (1).$

(1). est une EDO d'ordre 1, posons $y' = t(x)$
l'équation (1). devient alors:

$$y = xt + 2t \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx} + 2 \frac{dt}{dx}$$

$$\text{mais } y' = t \Rightarrow t = t + x \frac{dt}{dx} + 2 \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow (x+2) \frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ \frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow t = C = A \end{cases}$$

$$\text{mais } y' = t = A \Rightarrow y = Ax + C$$

$$\text{donc les solutions sont : } \begin{cases} x = -2 \\ y = Ax + C \end{cases} \quad (0.5 \text{ pts})$$

2. $y' - \frac{1}{x}y = x \cos x \quad (1).$

*) On résout l'équation homogène

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad (2).$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\log \left| \frac{y}{C} \right| = \log |x| \Rightarrow y = y_H = C \cdot x$$

*) Solution particulière $y_p(x)$:

$$\text{On pose } y_p(x) = C(x) \cdot x \Rightarrow y'_p = C'(x) \cdot x + C(x)$$

En substituant dans (1) on trouve

$$C'(x) = \cos x \text{ et par suite } C(x) = \sin x$$

$$\Rightarrow y_p(x) = x \sin x$$

$$\Rightarrow y_G = C \cdot x + x \sin x$$

(2)

(0.5 pts)