Université Badji Mokhtar Annaba
Département MIAS
Matière: Analyse II
Année: 2012-22013

Examen Semestriel d/Analyse II

Documents non autorisés

Durée: 01h30

Questions

A) Calculer les intégrales suivantes:

1) $\displaystyle\int \log\left(1+x^2\right) dx.$ **2)** $\displaystyle\int \frac{(2x+3)}{\sqrt{3-2x+x^2}} dx.$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x}{x+1} dx.$ **4)** $\displaystyle\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2} dx.$

Remarque: pour l'intégrale 4, on peut utiliser la formule de récurrence suivante:

$$\begin{aligned} 2kJ_{k+1} &= \frac{1}{\left(1+t^2\right)^k} + (2k-1) J_k, \quad k \geq 1 \\ \text{où} \quad J_k &= \int \frac{1}{\left(1+t^2\right)^k} dt, \\ \text{et} \quad J_1 &= \int \frac{1}{1+t^2} dt = arctgt + C, \quad C\text{étant une constante de } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

B) En faisant le changement de variables $t = tg\frac{x}{2}$, Calculer l'intégrale donnée par

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx.$$

C) Résoudre les équations différentielles suivantes:
(a) $(x-y+1)\,dy - (x+y+1)\,dx = 0$
(b) $y' - 2xy = e^{x^2}$.

BONNE CHANCE.

Corrigé de l'examen semestriel de l'Analyse II

question A

1) pour intégrer $\int \log(1+x^2)\,dx$, on utilise l'intégration par parties en posant :

$$\left.\begin{array}{l} dU = dx \Rightarrow U = x \\ V = \log(1+x^2) \Rightarrow dV = \dfrac{2x}{1+x^2}dx \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\int \log(1+x^2)\,dx = x\log(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= x\log(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx =$$

$$= x\log(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x\log(1+x^2) - 2x + 2\,\mathrm{Arctg}\,x + C.$$

02pts

2) pour intégrer $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x+x^2}}dx$, on procède comme suit :

$$\left.\begin{array}{l} (3-2x+x^2)' = 2x-2 \\ 2x+3 = (2x-2)+5 \\ 3-2x+3 = (x-1)^2 + (\sqrt{2})^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

02pts

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x+x^2}}dx = \int \frac{2x-2}{\sqrt{3-2x+x^2}}dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}}$$

$$= 2\sqrt{3-2x+x^2} + \frac{5}{2}\,\mathrm{Log}\left(\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{3-2x+x^2}\right) + C$$

3) On décompose la fraction rationnelle $\frac{x^2+3x}{x+1}$ de la façon suivante:

$$\frac{x^2+3x}{x+1} = \frac{x(x+3)}{x+1} = \frac{x(x+1+2)}{x+1} =$$

$$= x + \frac{2x}{x+1} = x + 2\,\frac{x+1-1}{x+1} =$$

$$= x+2-\frac{2}{x+1} \Rightarrow \int \frac{x^2+3x}{x+1}\,dx = \int\left(x+2-\frac{2}{x+1}\right)dx$$

03pts

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \log(x+1)^2 + C.$$

4) pour intégrer $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx$, on doit remarquer que :

•) $x^2+2x+3 = (x+1)^2 + (\sqrt{2})^2$

•) $\alpha = -1$ et $\beta = \sqrt{2} \Rightarrow$ On pose $x = \alpha + \beta t =$

$= -1+\sqrt{2}\,t \Rightarrow dx = \sqrt{2}\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^2 + (\sqrt{2})^2 = 2(t^2+1) \Rightarrow$

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{-1+\sqrt{2}t-1}{(2(t^2+1))^2}\cdot\sqrt{2}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{-2+\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\int \frac{-2}{(t^2+1)^2}dt + \int \frac{\sqrt{2}\,t}{(t^2+1)^2}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = (*) \Rightarrow$$

si on pose $I_2 = \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2}$ et $J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$

on a $(*) = \frac{1}{2} I_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} J_2$.

On peut remarquer que :

•) $I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} + C_1$

•) pour calculer J_2, on utilise la formule de récurrence suivante :

$$2k\, J_{k+1} = \frac{1}{(t^2+1)^k} + (2k-1)\, J_k \quad \text{pour } k=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\,J_2 = \frac{1}{t^2+1} + (2-1)\,J_1 & \text{où} \\ J_1 = \text{Arctg}\, t + C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2\,J_2 = \frac{1}{t^2+1} + \text{Arctg}\, t + C_2$$

$$\Rightarrow \quad J_2 = \frac{1}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\text{Arctg}\, t + C_2'$$

Ainsi

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \frac{1}{2} I_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} J_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\text{Arctg}\, t\right] + C$$

$$= -\frac{1}{4}\left((1-\sqrt{2})\frac{1}{t^2+1} - \text{Arctg}\, t\right] + C$$

mais $t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{4}\left[(1-\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} - \text{Arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right] + C$$

03 pts

5) dans $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$, en posant $t = tg\frac{x}{2}$

On a :

•) $\sin x = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \dfrac{2\sin x/2 \cos x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \dfrac{2\,tg\,x/2}{1+tg^2 x/2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

•) $\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\cos^2 x/2 + \sin^2 x/2} = \dfrac{1-tg^2 x/2}{1+tg^2 x/2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

•) $dt = \frac{1}{2}\left(1+tg^2 x/2\right) \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

•) si $x = 0 \Rightarrow t = 0$
si $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1+t^2+2t}{1+t^2+1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1+t^2+2t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt = 1 + \log 2.$$

03pts

Question C

1) soit l'équation différentielle

$$(x-y+1)\,dy-(x+y+1)\,dx=0$$

qui peut encore s'écrire :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x-y+1} \quad (1)$$

qui est une EDO d'ordre 1 se ramenant à une équation homogène :

ici : $a=1$ $b=1$, $a_1=1$ $b_1=-1$ $\Rightarrow \frac{a_1}{a}=1\neq\frac{b_1}{b}=-1$

donc on pose $\begin{cases}x=x_1+k\\ y=y_1+h\end{cases}$ où h et k sont des constants à déterminer

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1+h+k+1}{x_1-y_1+k-h+1}$$ où h et k sont telles que

$$\begin{cases}h+k+1=0\\ h-k+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=-1\\ k=0\end{cases}\Rightarrow\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1} \quad (2)$$

(2) est une EDO d'ordre 1 homogène car

$$f(x_1,y_1)=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}=f(\lambda x_1,\lambda y_1)=\frac{\cancel{\lambda}x_1+\cancel{\lambda}y_1}{\cancel{\lambda}x_1-\cancel{\lambda}y_1}$$

pour résoudre (2) on pose $z=\frac{y_1}{x_1}\Rightarrow y_1=zx_1\Rightarrow$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=z+x_1\frac{dz}{dx_1} \iff z+x_1\frac{dz}{dx}=\frac{x_1+x_1z}{x_1-x_1z}=\frac{1+z}{1-z}$$

$$\iff\frac{1-z}{1+z^2}\,dz=\frac{dx_1}{x_1}\iff\int\frac{1-z}{1+z^2}\,dz=\int\frac{dx_1}{x_1}$$

$$\iff \operatorname{Arctg} z-\frac{1}{2}\log(1+z^2)=\log|x_1|+C$$

soit en remplaçant $z=\frac{y_1}{x_1}$ et $\begin{cases}y_1=y+1\\ x_1=x\end{cases}$ on a

$$\operatorname{Arctg}\frac{y+1}{x}-\log\sqrt{1+\frac{(y+1)^2}{x^2}}=\log|x|+C$$

04 pts

2) l'équation $y' - 2xy = e^{x^2}$ (1)

est une EDO d'ordre 1 linéaire

On cherche sa solution générale sous la forme

$$y_G = y_H + y_p$$

où $\begin{cases} y_H \text{ est la solution générale de l'équation homogène } y' - 2xy = 0 \text{ associée à (1).} \\ y_p \text{ est une solution particulière de (1).} \end{cases}$

•) soit $y' - 2xy = 0$ (2)

$\Rightarrow \dfrac{dy}{y} = 2x\,dx \Rightarrow \log|y| = 2c\dfrac{x^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y_H = Ce^{x^2}}$

•) $y_p = c(x)e^{x^2}$

$y_p' = c'(x)e^{x^2} + 2x\,c(x)e^{x^2}$

On remplace dans (2)

$c'(x)e^{x^2} + 2x\,c(x)e^{x^2} - 2x\,c(x)e^{x^2} = e^{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(x)e^{x^2} = e^{x^2} \Rightarrow c'(x) = 1 \Rightarrow c(x) = x$

$\Rightarrow \boxed{y_p = xe^{x^2}}$

03pts

<u>Conclusion</u>:

$y_G = y_H + y_p = Ce^{x^2} + xe^{x^2} \Rightarrow$

$$\boxed{y_G = (C + x)e^{x^2}}$$