UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

ALGEBRE II

$2^{ème}$ EXAMEN — SEMESTER II — 2012/2013

Date: 29 Mai 2013 — Time: 10.00-11.30

Exercice 1. (5pts)

1. Montrer que les vecteurs $u = 1 + i$ et $v = 1 - i$ sont libre dans $\mathbb{R} - \mathbb{C}$ espace vectoriel.
2. Sont-ils libre dans $\mathbb{C} - \mathbb{C}$ espace vectoriel ?
3. Pourqoui la famille $S = \{0,\ 1,\ X\}$ est liée dans $E = f(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 2. (5pts) Soit f une application linéaire de E vers F. Montrer que:

1. $f(0) = 0$.
2. Le noyau de f est une sous-espace vectoriel de E.
3. L'application f est injective si $Kerf = 0$.
4. Est ce que la réciproque de 3 est vraie?

Exercice 3. (10pts) Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par: $f(x,\ y,\ z) = (x + y, x + y, 2z)$

1. Déterminer une base de $Kerf$:
2. f est-elle injective ? Surjective ? Pourquoi ?
3. Déduire le rang de f. Déterminer une base de Imf. .
4. Déterminer la matrice A_f associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que la partie $B\prime = \{e_1' = (1, -1, 0)\,,\ e_2' = (0, -1, 1)\,,\ e_3' = (0, 1, 0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Trouver la matrice de passage P de la base canonique B à la base $B\prime$.
7. Trouver la matrice de passage Q de la base canonique $B\prime$ à la base B. Vérifier que $P = Q^{-1}$.

Corrigé du 2ème examen. Algèbre II 2012-2013

Ex1

1/ Montrons que $u = 1+i$, $v = 1-i$ sont libre dans $\mathbb{R}-\mathbb{C}$ e.v.

On dit que u et v sont libre ssi

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ (0,25 pts)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\alpha(1+i) + \beta(1-i) = 0_{\mathbb{R}}} \Rightarrow$

$$(\alpha+\beta) + i(\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha-\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Alors, u et v sont libre. (1,5 pts)

2/ Dans le cas $\mathbb{C}-\mathbb{C}$.e.v. (0,5 pts)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, avec $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ et $\beta = \beta_1 + i\beta_2$.

$$\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow (\alpha_1 + i\alpha_2)(1+i) + (\beta_1 + \beta_2 i)(1-i) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) + i(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) + i(\beta_1 + \beta_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 0 \end{cases}$$ (0,5 pts) (0,5 pts)

deux éqts avec quatre inconnus $\Rightarrow \exists$ une infinité de sols ! Par exemple $\boxed{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = -1}$

d'ou $\alpha u + \beta v = (0 + 2i) + (0 - 2i) = 0$ (0,75 pts)

$\Rightarrow (u, v)$ est lié.

3/ La famille $S = \{0, 1, X\}$ est lié porcequ elle contient le 0. 1pt

Ex2 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire

1/ $f(0) = 0$?

$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow$

$f(0) + (-f(0)) = f(0) + f(0) + (-f(0))$

$\boxed{0 = f(0)}$ car E est régulier 1pt

2/ $\ker f = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$ est un s.e.v

a) $\ker f \neq \phi$ car $\boxed{0 \in \ker f}$ 0,75 pts

b/ Soit $x, y \in \ker f \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) = 0+0$

$\Rightarrow \boxed{x + y \in \ker f}$ 0,75 pts

c/ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$: $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda \cdot x = 0}$ 0,5 pts

3/ Montrons que si f est injective $\Rightarrow \ker f = \{0\}$.

soit $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow \boxed{x = 0}$ 1pt

le fait que f est injective

4/ La réciproque est vraie car :

si $\ker f = \{0\}$, alors, pour $x, y \in E$ et $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in \ker f = \{0\} \Rightarrow x - y = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = y} \Rightarrow f$ est injective. 1pt

Ex3 : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \to (x+y, x+y, 2z)$.

1/ Déterminons $\ker f$?

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x+y, x+y, 2z) = (0,0,0)\}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0$ et $y = -x$

$\Rightarrow \boxed{\ker f = \langle (1,-1,0) \rangle}$ 1pt

2/a) f n'est pas injective car $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ 1pt

b) $\dim \ker f = 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f$
$= 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow f(\mathbb{R}^3) \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$ 1pt

3/ $\boxed{\operatorname{Rang} f = \dim \operatorname{Im} f = 2}$ 0,5 pt

Une base de $\operatorname{Im} f$?

$\operatorname{Im} f = f(E) = \{(x+y, x+y, 2z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{x(1,1,0) + y(1,1,0) + z(0,0,2)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Im} f = \langle (1,1,0), (0,0,2) \rangle}$ 0,5 pts

1/ La matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$f(x,y,z) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) =$

$x(1,1,0) + y(1,1,0) + z(0,0,2)$

$$\Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ 1pt

2/ $B' = \{e'_1 = (1,-1,0), e'_2 = (0,-1,1), e'_3 = (0,1,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car $\operatorname{card} B' = \dim \mathbb{R}^3 = 3$,

donc, il suffit seulement de démontrer qu'elle libre.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha(1,-1,0) + \beta(0,-1,1) + \gamma(0,1,0) = (0,0,0)$

1pt

$\Rightarrow (\alpha, -\alpha - \beta + \gamma, \beta) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow$ elle est libre, donc, une base.

3/ La matrice de passage P de B à B'

$$\begin{cases} e'_1 = (1,-1,0) = 1(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + 0.(0,0,1) \\ e'_2 = (0,-1,1) = 0.(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + 1.(0,0,1) \\ e'_3 = 0.(1,0,0) + 1.(0,1,0) + 0.(0,0,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 1pt

7/ La matrice de passage φ de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} (1,0,0) = \alpha_1(1,-1,0) + \alpha_2(0,-1,1) + \alpha_3(0,1,0) \\ (0,1,0) = \beta_1(1,-1,0) + \beta_2(0,-1,1) + \beta_3(0,1,0) \\ (0,0,1) = \gamma_1(1,-1,0) + \gamma_2(0,-1,1) + \gamma_3(0,1,0) \end{cases}$$ 0,5pts

$$\Rightarrow \begin{cases} (1,0,0) = (\alpha_1, -\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2) \\ (0,1,0) = (\beta_1, -\beta_1-\beta_2+\beta_3, \beta_2) \\ (0,0,1) = (\gamma_1, -\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3, \gamma_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1 \\ \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 1 \\ \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 1, \quad \gamma_3 = 1 \end{cases}$$ 0,5pts

$$\Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ 1pts

Comme $$P \cdot \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \varphi^{-1}}$$ 1pt.