UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA — 24 janvier 2018

Faculté des sciences
Département de **MI**
Durée : 1^h30

Examen de mécanique

Exercice 1 (7 points) :

Dans le repère (O,X,Y,Z) de base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les cordonnées des points suivants : A(2,3,-1), B(3,-2,2) ,C(4,-3,3), D(-1,-2,0) .

1- Trouver les vecteurs : $\vec{V_1} = \vec{AB} + \vec{BC}$ **et** $\vec{V_2} = \vec{AD} + \vec{BD}$

2- rouver le vecteur unitaire $\vec{u_1}$ parallèle à $\vec{V_1}$ et un vecteur unitaire $\vec{u_2}$ perpendiculaire à $\vec{V_1}$

3- Calculer l'angle compris entre $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$

4- Calculer la projection du vecteur $\vec{V_2}$ sur le vecteur $\vec{V_1}$ et la projection de $\vec{AB}$ sur le plan (OXY)

5- Calculer la surface du triangle (A,B,C)

6- Est-ce que le point D appartient au plan (Δ) contenant le triangle (ABC)

7- Trouver l'équation de ce plan

Exercice 2 (7points) :

Dans le système des coordonnées cartésiennes, le mouvement d'un point M est donné par les équations suivantes : $x = t^2$ et $y = t^2 - 2t$

Déterminer :

1- L'équation de la trajectoire du mouvement du point M.
2- Le vecteur vitesse et calculer son module.
3- Le vecteur accélération et calculer son module.
4- Les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure en fonction du temps.
5- Calculer le rayon de courbure à l'instant t = 1s.

Exercice 3 (6 points) :

Les équations paramétriques dans le système des coordonnées polaires (r ,θ) d'un point M se déplaçant dans le plan (XOY) sont données par :

$$r = 4\,t^2 + 2t \quad \text{et} \quad \theta = 2t$$

Dans le système des coordonnées polaires :

1- Déterminer l'équation de la trajectoire.
2- Ecrire les relations du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$
3- Déterminer ces trois vecteurs en fonction du temps et calculer leurs modules.

Bonne réussite

Corrigé Examen Mécanique :

Exo 1 $A\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}4\\-3\\3\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AB} = +\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{BC} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ 0,25 $\vec{AD} = -3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{BD} = -4\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k}$ 0,25

1) $\vec{V_1} = \vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$ 0,25

$\vec{V_2} = \vec{AD} + \vec{BD} = -7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$ 0,25

2) $\vec{u_1} \parallel \vec{V_1} \Rightarrow \vec{u_1} = \frac{\vec{V_1}}{|\vec{V_1}|} = \frac{2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{56}}$ 0,5

$\vec{u_2} \perp \vec{V_1}$ comme $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} \perp \vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$

$\vec{u_2} = \frac{\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}}{|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}|}$ $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -6 & 4\\ -7 & -5 & -1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}26\\-26\\-52\end{pmatrix}$

$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = 26(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$

$|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}| = 26\sqrt{1+1+4} = 26\sqrt{6}$

$\vec{u_2} = \frac{26(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})}{26\sqrt{6}} = \frac{\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{6}}$ 0,5

3) $\cos(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{|\vec{V_1}| \cdot |\vec{V_2}|} = \frac{-14 + 30 - 4}{\sqrt{56}\,\sqrt{75}} = \frac{12}{\sqrt{56}\,\sqrt{75}}$ 0,5 0,5

4) $\text{Proj}\, \vec{V_2}/\vec{V_1} = \frac{\vec{V_2} \cdot \vec{V_1}}{|\vec{V_1}|} = \frac{12}{\sqrt{56}}$ 0,5 0,5

$\vec{\text{Proj}}\, \vec{AB}/oxy = \vec{i} - 5\vec{j}$ 0,5 $\text{Proj}\, \vec{AB}/oxy = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

Exo. 1 (suite)

5) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\wedge\vec{BC}\right|$ 0,5 $\quad \vec{AB}\wedge\vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+16} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}$ 0,5

6) Si $D \in$ plan $(A) \Rightarrow (\vec{AB}\wedge\vec{BC})\cdot\vec{BD} = 0$

$(-2\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k})\cdot(-4\vec{i}+0\vec{j}-2\vec{k}) = 8+0-8=$

$D \in$ plan (A) 0,5

7) Equation du plan soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (A)$

$\vec{AM}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{BC}) = 0$

$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ +2 \\ +4 \end{pmatrix} = -2(x-2)+2(y-3)+4(z+1) = 0$

$-2x+4+2y-6+4z+4=0$

$-2x+2y+4z+2=0$ 1

$\boxed{-x+y+2z+1=0}$ equation du plan.

Exo 2

$$M\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$$

1- $y = x - 2\sqrt{x}$ équation de la trajectoire 0,5

2 Vitesse $\vec{v}\begin{pmatrix} 2t \\ 2t-2 \end{pmatrix}$ 1 $\quad |\vec{v}| = \sqrt{4t^2 + (2t-2)^2}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{8t^2 - 8t + 4}$$

$$|\vec{v}| = 2\sqrt{2t^2 - 2t + 1}$$ 0,5

Accélération $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 1 $\quad |\vec{a}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 0,5

3- $$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{2(4t-2)}{2\sqrt{2t^2-2t+1}} = \frac{4t-2}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$$ 1

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 8 - \frac{(4t-2)^2}{2t^2-2t+1} = \frac{16t^2 - 16t + 8 - 16t^2 + 16t - 4}{2t^2-2t+1}$$

$$a_N^2 = \frac{4}{2t^2-2t+1} \Rightarrow a_N = \frac{2}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$$ 1

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{4(2t^2-2t+1)}{\frac{2}{\sqrt{2t^2-2t+1}}} = 2(2t^2-2t+1)^{\frac{3}{2}}$$ 1

à $t = 1\,s$ $\quad \rho = 2(1) = 2$ USI

0,5

Exo. 3 $\quad r = 4t^2 + 2t$

$\theta = 2t$

1 – Equation de la Trajectoire : $r = \theta^2 + \theta$ 0,5

2 – $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ 0,5

$\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ 0,5

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$ 0,5

3 – $r = 2(2t^2 + t) \qquad \theta = 2t$

$\dot{r} = 2(4t+1) \qquad \dot{\theta} = 2$

$\ddot{r} = 8 \qquad \ddot{\theta} = 0$

$\vec{OM} = 2(2t^2+t)\vec{u}_r$ 0,5

$\vec{V} = 2(4t+1)\vec{u}_r + 4(2t^2+t)\vec{u}_\theta$ 1

$|\vec{V}| = 2\sqrt{(4t+1)^2 + 4(2t^2+t)^2}$ 0,5 $= 2\sqrt{16t^2+8t+1+16t^4+16t^3+}$

$|\vec{V}| = 2\sqrt{20t^2+16t^3+16t^4+8t+1}$

$= 2\sqrt{16t^4+16t^3+20t^2+8t+1}$

$\vec{a} = 8 - 4.2(2t^2+t)\vec{u}_r + (2.2(4t+1).2 + 0)\vec{u}_\theta$ 1

$\vec{a} = (8 - 16t^2 - 8t)\vec{u}_r + 8(4t+1)\vec{u}_\theta$

$|\vec{a}| = \sqrt{(-16t^2-8t+8)^2 + 64(4t+1)^2}$ 0,5

 0,5 pour le reste