Université Badji Mokhtar Annaba — Année 2017-2018

Tronc commun de Mathématiques et Informatique

Examen Analyse1

Problème 1. (12 points)

I- Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse si la proposition est fausse.

Soit A une partie de IR et (U_n) une suite réelle.

1) Si (U_n) est bornée alors elle est convergente.
2) Si (U_n) est de Cauchy alors elle est bornée.
3) Si A est bornée alors elle admet une borne supérieure.
4) Si A est minorée alors min A existe.

II- Soit (U_n) la suite réelle définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \frac{1+2U_n}{2+U_n}$

1) Montrer que : $\forall n \in IN, U_n > 1$.
2) Etudier la monotonie de (U_n) .
3) La suite (U_n) est-elle convergente ?. Si c'est oui, donner sa limite.
4) Soit l'ensemble $A = \{U_n,\ n \in IN\}$. Déterminer supA, infA, maxA, minA.

III- Montrer que la suite de terme général

$U_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n}$ est une suite de Cauchy.

Problème 2. (8 points)

I- Soit $(\alpha, \beta) \in IR^2$ et f une fonction définie par : $f(1) = 2 \quad et$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{\alpha x+\beta} & x \in]1, +\infty[\\ \alpha^2 x + \beta^2 \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & x \in [0,1[\\ x^3 + \alpha^2 \sin(x+1) & x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

Déterminer α et β pour que f Soit continue en 0 et en 1.

II- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x$, $\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x^2}$,

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1-\cos x}$.

III- Résoudre l'équation : $\arccos x = \arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{1}{4}$. □

Corrigé de l'examen
Analyse 1

Problème 1 (12 pts).

I – Répondre par vrai ou faux : (1 + 0,5 + 0,5 + 1) pts.

1) faux : contre exemple : la suite de terme général $U_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

2) Vrai, 3) Vrai, 4) faux ; exemple : $A =]0,1]$ ensemble minoré mais $\min A \nexists$.

II – $U_0 = 3$, $U_{n+1} = \dfrac{1+2U_n}{2+U_n}$

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 1$. (1pt)

pour $n = 0$, $U_0 = 3 > 1$. (vrai).

Supposons que $U_n > 1$ et montrons que $U_{n+1} > 1$.

on a : $U_{n+1} - 1 = \dfrac{1+2U_n}{2+U_n} - 1 = \dfrac{U_n - 1}{2+U_n} > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 1$

ainsi : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 1$. (1pt)

2) la monotonie de (U_n) :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1+2U_n}{2+U_n} - U_n = \frac{1-U_n^2}{2+U_n} = \frac{(1-U_n)(1+U_n)}{2+U_n}$$

comme $U_n > 1, \forall n \Rightarrow 1 - U_n < 0$, ce qui donne que $U_{n+1} - U_n < 0$, donc (U_n) est décroissante.

3) (U_n) est décroissante et minorée par 1, elle converge alors vers une limite qu'on note ℓ., (2pts)

ℓ doit vérifier l'équation : $\ell = \dfrac{1+2\ell}{2+\ell} \Leftrightarrow$ $\ell^2 - 1 = 0$, d'où $\ell = -1$ (exclue) ou $\ell = 1$, on déduit alors que $\ell = 1$.

I) $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Comme la suite (U_n) est strictement décroissante et minorée par 1 et converge vers $l = 1$, on déduit alors que : $\inf A = 1$, mais $1 \notin A$, donc $\min A \nexists$. (2pts)

et $\sup A = \max A = 3$..

III - Montrons que la suite de terme général :

$$U_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \cdots + \frac{\cos n}{3^n}$$ est de Cauchy.

on doit donc montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : p \geq q \geq N \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon.$$

on a : $$U_p = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \cdots \frac{\cos q}{3^q} + \frac{\cos(q+1)}{3^{q+1}} + \cdots + \frac{\cos p}{3^p}.$$

et $$U_q = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \cdots + \frac{\cos p}{3^p}.$$

$$|U_p - U_q| = \left| \frac{\cos(q+1)}{3^{q+1}} + \cdots + \frac{\cos(p-1)}{3^{p-1}} + \frac{\cos p}{3^p} \right|.$$

$$\leq \left|\frac{\cos(q+1)}{3^{q+1}}\right| + \cdots + \left|\frac{\cos(p-1)}{3^{p-1}}\right| + \left|\frac{\cos p}{3^p}\right|.$$

$$\leq \frac{1}{3^{q+1}} + \cdots + \frac{1}{3^{p-1}} + \frac{1}{3^p}$$ (3pts)

$$\leq \frac{1}{3^{q+1}} \left[1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{p-q-1}}\right].$$

$$\leq \frac{1}{3^{q+1}} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{p-q}}{1 - \frac{1}{3}}\right]$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^q} < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow 3^q > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow q \ln 3 > \ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$$

$$\Rightarrow q > \frac{\ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)}{\ln 3}.$$

on déduit alors que (U_n) est une suite de Cauchy

Problème 2 (8 points).

I.) $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $f(x)=\begin{cases} 2.e^{\alpha x+\beta} & x\in]1,+\infty[\\ \alpha^2 x+\beta^2\dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & x\in[0,1[\\ x^3+\alpha^2\sin(x+1) & x\in]-\infty,0[\end{cases}$

$f(1)=2.$

déterminons α,β pour que f soit continue en 0 et en 1.

* la continuité en 0:

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=\beta^2\sin 1.$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[\alpha^2x+\beta^2\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right]=\beta^2\sin 1.$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[x^3+\alpha^2\sin(x+1)\right]=\alpha^2\sin 1.$ (1pt)

donc pour que f soit continue en 0, il faut que:

$\beta^2\sin 1=\alpha^2\sin 1$, ce qui donne $\alpha^2=\beta^2$.

* la continuité en 1.

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=2.$

mais $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1}2e^{\alpha x+\beta}=2e^{\alpha+\beta}.$ (1pt)

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[\alpha^2x+\beta^2\underbrace{\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}}_{1}\right]=\alpha^2+\beta^2$

pour que f soit continue en 1

il faut que: $2e^{\alpha+\beta}=\alpha^2+\beta^2=2$, ce qui donne

$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \text{et}\\ \alpha^2+\beta^2=2\end{cases}$ avec la condition: $\alpha^2=\beta^2$

on déduit que: $(\alpha,\beta)=(1,-1)$ ou $(\alpha,\beta)=(-1,1)$ (1pt)

Calcul des limites : (0,5 + 1 + 1) pts.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x = 0$ car la fonction ; $x \to \sin x$ est bornée et $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2x^2} = \frac{0}{0}$ F.I. on multiplie par le conjugué.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - (2+x)}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[2\sqrt{1+x} - (2+x)\right]\left[2\sqrt{1+x} + (2+x)\right]}{2x^2\left[2\sqrt{1+x} + 2 + x\right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{2x^2\left[2\sqrt{1+x} + 2 + x\right]} = -\frac{1}{8}.$$

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$. on a : $\cos x \overset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$.

$\cos 2x \overset{0}{\sim} 1 - \frac{(2x)^2}{2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2x^2 - 1 + \frac{x^2}{2}}{1 - 1 + \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{3}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = -3$$

III - Résoudre l'équation : $\arccos x = \arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{4}$

Vérifions que : $\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{4} \in [0, \pi]$.

on a : $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, comme la fonction $x \to \arcsin x$ est strict croissante alors : $\arcsin 0 < \arcsin \frac{1}{3} < \arcsin \frac{1}{2}$

ce qui donne : $0 < \arcsin \frac{1}{3} < \frac{\pi}{6}$ ... (1)

de même on a : $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, la fonction arccos étant strict décroissante on aura :

$\arccos \frac{1}{2} < \arccos \frac{1}{4} < \arccos 0$, ce qui donne : (2,5 pts)

$\frac{\pi}{3} < \arccos \frac{1}{4} < \frac{\pi}{2}$ ... (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{3} < \arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{4} < \frac{2\pi}{3} < \pi$.

* on a : $\cos(\arccos x) = \cos\left(\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x = \cos\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) \cos\left(\arccos \frac{1}{4}\right) - \sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) \cdot \sin\left(\arccos \frac{1}{4}\right)$.

$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$

$x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{16}}$