

Examen de Rattrapage-Analyse2

Exercice 1. (4points)

1- Donner le DL en 0 à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = \cos x \cdot \sqrt{1+x}$.

2- En utilisant le DL calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2} \sin^2 x}{3x^2 \sin^2 x}$.

Exercice 2. (4 points)

En utilisant les sommes intégrales de Riemann déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)$$

Exercice 3. (6 points)

Calculer :

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$I_2 = \int e^x \cdot \sin x dx$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\cos x} dx$$

Exercice 4. (6points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $x dx + y dy = 0$

2) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

□

2016-2017.

Corrigé de l'examen de Rattrapage Analyse 2.

exercice n°1 (4 pts).

1. le DL en 0 de $f(x) = \cos x \cdot \sqrt{1+x}$, $n=2$.

on sait que: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$

(2 pts) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)$

donc: $\cos x \cdot \sqrt{1+x} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)\right) \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)\right)$

ce qui donne à l'ordre 2,

$$\cos x \cdot \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

2* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sinh x}{x} = ? \frac{0}{0} \text{ F.I.}$

le DL à l'ordre 2 suffit.

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2}$$

$$\sinh x \simeq x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{2} = 0$$

* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \tanh x + \frac{1}{2} \sinh^2 x}{3x^2 \cdot \sinh^2 x} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$

le D.L à l'ordre 1 suffit, on a:

$$\ln(1+x) \simeq x, \tanh x \simeq x, \sinh x \simeq x.$$

$$\text{donc, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \tanh x + \frac{1}{2} \sinh^2 x}{3x^2 \cdot \sinh^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{1}{2} x^2}{3x^4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$$

(1 pt)

exercice n° 2 (4pts).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = ?$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \quad (N) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \end{aligned}$$

on sait que: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k)$.

donc dans notre cas on a: $b=1$, $a=0$ et $f(c_k) = \frac{k}{n}$.
(en prenant $c_k = \frac{k}{n}$, $f(\frac{k}{n}) = \frac{k}{n}$). (N)

donc, $f(x) = x$.

on déduit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \int_0^1 x dx$ (N)
et par conséquent: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$ (N)

Exercice n° 3. (6pts).

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx.$$

on pose: $u = x+1$. donc, $du = dx$. et (2)

$$I_1 \text{ devient: } I_1 = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \operatorname{arctg} u + c$$

$$I_1 = \int e^x \cdot \sin x dx = \operatorname{arctg}(x+1) + c.$$

on intègre par parties:

$$u = e^x \rightarrow u' = e^x$$

$$v' = \sin x \rightarrow v = -\cos x.$$

$$I_2 = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

on calcule J par parties;

$$u = e^x \rightarrow u' = e^x$$

$$v' = \cos x \rightarrow v = \sin x$$

$$J = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

on remplace J dans I_2 pour trouver; (2)

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \sin x \, dx = e^x [\sin x - \cos x]$$

$$\text{donc: } \frac{I_2}{2} = \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} [\sin x - \cos x] + C$$

$$* \frac{I_3}{3} = \int \frac{dx}{\cos x} \quad , \text{ on fait le changement, } t = \tan \frac{x}{2} \quad , \text{ donc: } dx = \frac{2dt}{1+t^2} \text{ et } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{I_3}{3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = 2 \int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} \\ = \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t} \quad (2)$$

$$= -\ln|1-t| + \ln|1+t| + C$$

$$= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C$$

$$= \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C$$

exercice n°5 (6pts).

1) $x dx + y dy = 0$.

$$\Rightarrow \int x dx + \int y dy = C'$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C'$$

(3)

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2C' \quad \text{donc la solution (implicite):}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = C$$

2) $y'' + 2xy' = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow y'' = -2xy' + 2xe^{-x^2}$
c'est une équation linéaire d'ordre 2; de la

forme $y' = a(x)y + b(x)$, avec $a(x) = -2x$.
on sait que la solution générale est,

$$y_G = y_0 + K e^{A(x)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

$\uparrow$ sol particulière $\uparrow$ solution de l'équation homogène associée.

$$\text{on } A(x) = \int a(x) dx = \int -2x dx = -x^2.$$

donc la solution de l'équation homogène, $y' = -2xy$ est; $y = K e^{-x^2}$ (3)

cherrons maintenant la solution particulière y_0 de la forme, $y_0 = K(x) e^{-x^2}$ (en utilisant la méthode de la variation de la constante.).

$$\text{on a } y_0' = K'(x) e^{-x^2} - K(x) \cdot 2x \cdot e^{-x^2}; \text{ on remplace dans notre équation, on trouve}$$
$$K'(x) e^{-x^2} - K(x) 2x e^{-x^2} = -2x K(x) e^{-x^2} + 2x e^{-x^2}.$$

$$\Rightarrow K'(x) = 2x \Rightarrow K(x) = \int 2x dx = x^2.$$

$\Rightarrow y_0 = x^2 e^{-x^2}$ et la solution générale est donc

$$y_G = x^2 e^{-x^2} + K e^{-x^2} = e^{-x^2} (x^2 + K), \quad K \in \mathbb{R}.$$

-4-