Université Badji Mokhtar Annaba | Année [illegible]
Département: M.I.A.S | Durée: 1h30

Introduction aux Probabilité et au Statistique descriptive

Examen semestriel :

Exercice n°01 (8points):

Une société de services en informatique fait une analyse des temps d'utilisation devant un ordinateur. Elle réalise une enquête auprès d'un échantillon de 200 clients et obtient les résultats suivants.

Temps de connection en heure par an	[200, 400[	[400,600[	[600,800[	[800,1000[	[1000,1200[	[1200,1400[
Nombre d'utilisateurs	15	32	35	78	31	9

1) Déterminer la population, le caractère étudié et donner sa nature
2) Représenter graphiquement la série et calculer la moyenne
3) Déterminer la classe modale, la médiane et les trois quartiles
4) Quel est le pourcentage d'utilisateurs qui se connectent au moins 1 000 heures?

Exercice n°02 (6points):

Une urne contient six boules rouges et quatre boules blanches.

I-On tire succesivement deux boules sans remise.

Calculer la probabilité des événements suivants :

1- les deux boules sont rouges,
2- les deux boules sont blanches,
3-les deux boules sont de couleurs différentes

II- Calculer la probabilité des événements 1, 2 et 3 si le tirage est simultanné.

Exercice n°03 (3points):

Deux usines fabriquent les mêmes pièces.La première produit 70% de bonnes pièces et la seconde 90%. Les deux usines fabriquent la même quantité de pièces.

On achète une pièce et on constate qu'elle est bonne. Quelle est la probabilité qu'elle proviennent de la seconde usine ?

Questions de cour (3points):

1- Quel est le paramétre indiquant l'homogénité d'une série statistique et pour quelle valeur de cet paramétre la série est homogène?

2-Démontrer :

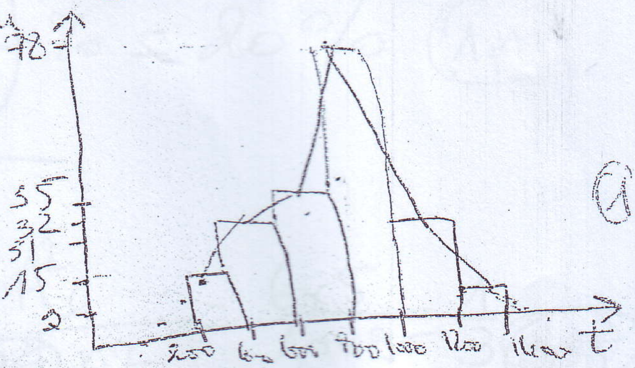
1- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
2- Si A et B sont indépendants $\Longrightarrow$ A et $\bar{B}$ sont aussi indépendants

1

[illegible] 0,25

Ex 1

- La Population : les 200 clients 0,5
- le caractère étudié : le temps d'utilisation du [illegible] 0,25
- Nature : quantitatif continu 0,25
- Le graphe



1

- La Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i = 805\ H$ 0,25 0,5

classes	n_i	$n_i^{c\uparrow}$	x_i	$n_i x_i$
200-400	15	15	300	4500
400-600	32	47	500	16000
600-800	35	82	700	24500
800-1000	78	160	900	70200
1000-1200	31	191	1100	34100
1200-1400	9	200	1300	11700
	n = 200			161 000

0,5

- La classe modale : [800-1000[0,5
- La médiane : $\frac{n}{2} = 100 \in [800-1000[\Rightarrow$ 0,25

$Me = x_i + \Delta x_i \frac{\frac{n}{2} - n_{i-1}^{c\uparrow}}{n_i^{c\uparrow} - n_{i-1}^{c\uparrow}} = 800 + 200\ \frac{100 - 82}{160 - 82} = 846,153\ H$ 0,25 0,25 0,25

$\frac{n}{4} = 50 \Rightarrow Q_1 \in [600-800[\Rightarrow Q_1 = x_i + \Delta x_i \frac{\frac{n}{4} - n_{i-1}^{c\uparrow}}{n_i^{c\uparrow} - n_{i-1}^{c\uparrow}}$ 0,25 0,25

$\Rightarrow Q_1 = 600 + 200 \frac{50 - 47}{82 - 47} = 617,142\ H$ 0,25 0,25

2

[800, 1000[: 0,25

$P_3 = \dfrac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} \times a_i + e_{i-1}$ ... $= 800 + 200 \cdot \dfrac{150 - 124}{180 - 124}$

0,25 0,25

$Q_3 = 914{,}358$ H 0,25

4) le pourcentage d'utilisateurs qui se connectent au moins 1000 heures $= \left(\dfrac{31 + 9}{200}\right)\% = 20\%$ 1pt

o0o

Ex 2 :

1) Tirer 2 boules Rouges $\Rightarrow P_1 = \dfrac{A_6^2}{A_{10}^2} = \dfrac{6 \times 5}{10 \times 9} = \dfrac{1}{3}$ 0,25

0,75

2) tirer 2 boules blanches $\Rightarrow P_2 = \dfrac{A_4^2}{A_{10}^2} = \dfrac{4 \times 3}{10 \times 9} = \dfrac{2}{15}$ 0,25

0,75

3) tirer 2 boules de couleurs différentes.

$\Rightarrow$ ~~2 Rouges, ou 2 blanches~~

$\Rightarrow$ 1re Rouge et 2ème blanche ou 1ère blanche et 2ème Rouges 0,25

$\Rightarrow P_3 = \dfrac{A_6^1 \times A_4^1 + A_4^1 \times A_6^1}{A_{10}^2} = \dfrac{6 \times 4 + 4 \times 6}{10 \times 9} = \dfrac{8}{15}$ 0,25

0,5

ou Bien $P_3 = 1 - (P_1 + P_2)$

Rmq : On pourra calculer P_1, P_2, P_3 par calculant nbres de cas Favorables et possibles sans passer par formule d'Arrangement Ex : $P_1 = \dfrac{6}{10} \times \dfrac{5}{9}$

⇒ l'ordre n'est pas important 0,75

① $P_1 = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$ 0,25

0,5

② $P_2 = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$ 0,25 $= \frac{2}{15}$

0,5

③ $P_3 = \frac{C_6^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{6 \times 4}{45} = \frac{24}{45}$ 0,25 $= \frac{8}{15}$

0,5

— o o o —

Exo 3 : Soit l'évenement : B " La pièce est bonne "

U_1 " La pièce est fabriqué par l'usine 1 "

U_2 " " " 2 "

On a : $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$ 0,5

$P(B | U_1) = 0{,}7$ 0,5

$P(B | U_2) = 0{,}9$ 0,5

(Formule de Bayes)

question : $P(U_2 | B) = \frac{P(B|U_2) \cdot P(U_2)}{P(B|U_1) \cdot P(U_1) + P(B|U_2) \cdot P(U_2)}$ 0,75

0,5

$= \frac{0{,}9 \times \frac{1}{2}}{0{,}7 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}9 \cdot \frac{1}{2}} = 0{,}57$

0,25

— o o o —

1) Le paramètre est le coefficient de variation.

$$CV = \frac{\sigma(x)}{\bar{X}} \times 100 \quad 0,5$$

- Il doit en pratique inférieur à 15 % 0,5

2) on a : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ et comme $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$ 0,25 0,25

D'où d'après l'axiome 2 ~~vérifiée~~ par la probabilité

on a : $P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ 0,25

$\Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ 0,25

Si A et B sont indépendants $\Rightarrow$ A et $\bar{B}$ le sont.

On doit démontrer que $P(A \cap \bar{B}) = P(A)\,P(\bar{B})$?

On a d'après (1) : $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ 0,25

Or comme A et B sont indépendants ie $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ 0,25

alors on obtient :

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A)\,P(B) = P(A)[1 - P(B)] \quad 0,25$$

$$= P(A) \cdot P(\bar{B}) \Rightarrow$$

A et $\bar{B}$ sont indépendants 0,25