

Examen Analyse2

Exercice 1. (5points)

- 1- Donner le DL en 1 à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = e^{\sqrt{x}}$. (1.5)
- 2- Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \cos x \cdot \exp x$. (1.5)
- 3- En utilisant le DL calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \ln(1+x^2)}{x \tan x}$. (2)

Exercice 2. (3 points)

En utilisant les sommes de Darboux montrer que la fonction définie sur $[a, b]$ par $f(x) = \alpha$ (α constante) est intégrable au sens Riemann. (3)

Exercice 3. (6 points)

Calculer :

$$I_1 = \int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx \quad (2)$$

$$I_2 = \int (\cos x)^{2017} \cdot \sin x dx \quad (2)$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx \quad (2)$$

Exercice 4. (6points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1) y' = \frac{x+y-3}{x-y-1} \quad (3)$$

$$2) xy' + y = y^2 \quad (3)$$

□

Analyse 2

exos (gpts)

1) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $n = 2$

on sait que:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

• $f(1) = e$

• $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{e}{2}$

(15)

• $f''(x) = \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}} \right)' = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} e^{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) e^{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow f''(1) = 0$

le DL de $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ est donc:

$$f(x) = e + \frac{e}{2}(x-1) + o((x-1)^2)$$

2) $f(x) = \cos x \cdot \exp x$ ($n = 3$), $x_0 = 0$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \varepsilon_1(x)x^3$, $\varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \varepsilon_2(x)x^3$, $\varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

on multiplie les deux expressions;

$$\cos x \cdot \exp x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \varepsilon_1(x)x^3 \right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \varepsilon_2(x)x^3 \right)$$

$$\Rightarrow = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) - \frac{1}{2}x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) + \varepsilon_3(x)x^3$$

$f(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \varepsilon_4(x)x^3$, $\varepsilon_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \ln(1+x^2)}{x \tan x}$

on a: $\sin x = x + x\varepsilon_1(x)$

$\ln(1+x^2) = x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$

$\tan x = x + x\varepsilon_3(x)$

(1)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + x}{x \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x \xi_3(x)}{1 + \xi_3(x)} = a.$

Exo 2 (3pts) $f(x) = \alpha \sin[a, b]$.

Soit la subdivision $\mathcal{d} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ de $[a, b]$
 on a, $\sup_{x_{k-1}, x_k} f(x) = M_k = \alpha$ et $\inf_{x_{k-1}, x_k} f(x) = m_k = \alpha$. (1)

Les sommes de Darboux.

$$S = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^n \Delta x_k =$$

$$\alpha [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})]$$

$$S = \sum_{k=1}^n \alpha (x_k - x_{k-1}) = \alpha (b - a).$$

$$s = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \alpha (b - a)$$

on remarque que: $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} S = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} s = \alpha (b - a)$.

La fonction est donc intégrable au sens de Riemann
 et $\int_a^b f(x) dx = \alpha (b - a)$

Exo 3 (6pts)

$$I_2 = \int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$$

on remarque que le dénominateur admet 2 racines: $\Delta > 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

donc, $\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)}$

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-4} \quad \text{on trouve}$$

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{-\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{\frac{6}{5}}{x-4} \quad (2)$$

ainsi, $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{6}{5} \int \frac{dx}{x-4}$

$$= -\frac{1}{5} \ln|x+1| + \frac{6}{5} \ln|x-4| + C$$

$$I_2 = \int (\cos x)^{2017} \cdot \sin x dx$$

en posant $u = \cos x$ on aura, $du = -\sin x dx$

on obtient donc

$$I_2 = -\int u^{2017} du = -\frac{u^{2018}}{2018} + C \quad (3)$$

$$I_2 = -\frac{(\cos x)^{2018}}{2018} + C$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx, \quad \text{on pose } t = \tan \frac{x}{2} \text{ donc}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \text{par } x=0 \rightarrow t=0 \text{ et } x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \quad (2)$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t} dt = \int_0^1 \frac{2}{(t+1)^2} dt = \frac{-2}{1+t} \Big|_0^1 = 1$$

(3)

(bpt)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-2}{x-y-1}$$

on fait le changement $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y+\alpha+\beta-3}{X+Y+\alpha-\beta-1}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y+\alpha+\beta-3}{X+Y+\alpha-\beta-1}$$

on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases}$$

on trouve : $\alpha = 2$ et $\beta = 1$

et l'équation devient : $\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$ qui est une équation homogène.

On pose alors : $u = \frac{Y}{X}$ (ou $Y = uX$)

$$\frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX}$$

on remplace Y et $\frac{dY}{dX}$ dans l'équation homogène,

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{X+uX}{X-uX} \Leftrightarrow u + X \frac{du}{dX} = \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow$$

$$X \frac{du}{dX} = \frac{1+u^2}{1-u} \Leftrightarrow \frac{dX}{X} = \frac{1-u}{1+u^2} du$$

(3)

$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{2} \frac{2u}{1+u^2} \right) du = \int \frac{dX}{X}$$

$$\Leftrightarrow \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|CX|$$

$$\Leftrightarrow \arctan u = \ln|CX \sqrt{1+u^2}|$$

$$\Leftrightarrow CX \sqrt{1+u^2} = \exp(\arctan u)$$

Comme $u = \frac{Y}{X}$ on trouve :

$$CX \sqrt{1 + \frac{Y^2}{X^2}} = \exp\left(\arctan \frac{Y}{X}\right)$$

$$\Leftrightarrow C \sqrt{X^2 + Y^2} = \exp\left(\arctan \frac{Y}{X}\right)$$

$$\Leftrightarrow C \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \exp\left(\arctan \frac{y-1}{x-2}\right)$$

on divise par y^2

$$y' y^{-2} + \frac{1}{x} y y^{-2} = -\frac{1}{x} \quad (*)$$

Equation de Bernoulli

$$y' y^{-2} + \frac{1}{x} y^{-1} = -\frac{1}{x} \quad (**)$$

on pose $z = y^{-1}$, donc $z' = -y^{-2} y'$

on remplace dans l'équation (*)

$$-z' + \frac{1}{x} z = -\frac{1}{x} \quad (***)$$

linéaire d'ordre 1.

on a: $z_G = z_0 + z$ où z est la solution de l'équation homogène associée: $z' = \frac{1}{x} z$.

on sait que $z = k e^{A(x)}$ où $A(x) = \int \frac{1}{x} dx$
 $A(x) = \ln x$, donc: $z = kx$.

on cherche maintenant la solution particulière z_0 de la forme: $z_0 = k(x) \cdot x$. (variation de la constante)

$z_0' = k'(x)x + k(x)$. on remplace dans (***)

$$k'(x)x + k(x) = \frac{1}{x} k(x)x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow xk'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow k'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow k(x) = \int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x}$$

donc la solution particulière est: $z_0 = \frac{1}{x}$.

et la solution générale est: $z_G = 1 + kx$.

et comme $z = \frac{1}{y}$ on aura:

$$\frac{1}{y} = 1 + kx, \text{ ce qui donne: } y = \frac{1}{1 + kx}.$$

3