UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

SEMESTRE 2 – 2016-2017

EXAMEN – ALGEBRE 2

Mai 2017

Durée: 1h30m

Question de cours (3 points) Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Rappeler la définition de sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $V_1 \cap V_2$ est aussi un sous espace vectoriel de E.

Exercice 1 (8 points)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2z, y, y + z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Calculer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, avec $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.
3. Donner la matrice A_f de f dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.
4. Déterminer la matrice A_{f^2} de $f \circ f$ dans la base canonique.
5. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$ et leurs dimensions. f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
6. Donner le théorème de rang et l'appliquer à f.

On pose $e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (1, 1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver la matrice de passage P de la base canonique B à la base B'.
3. Déterminer la matrice de f dans la base B'.

Exercice 2 (3 points)

1. Soit A la matrice donnée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Calculer A^2 et écrire le résultat en fonction de A et de I_3

   b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 3 (6 points) Soit le système (1) avec $a \in \mathbb{R}$ suivant

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 12 \\ 2x + ay + 2z = 5 \\ -x + y = -8 \end{cases} \qquad (1)$$

i) Donner l'écriture matricielle du système (1).

ii) Calculer le rang de la matrice de (1) suivant la valeur de a.

iii) Pour quelles valeurs de a le système (1) est de Cramer ?

iiii) Pour $a = -3$, résoudre ce système (1) par ma méthode de Cramer.

Correction de l'examen d'algèbre 2 :

Question de cours :

1. Une partie non vide V de E est un sous-espace vectoriel de E, si c'est une partie stable pour les deux lois de E, c'est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites. 1

2. $\begin{cases} 0 \in V_1 \\ 0 \in V_2 \end{cases} \Rightarrow 0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset.$ 0,1

$\begin{cases} x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x \in V_1 \text{ et } x \in V_2 \\ y \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow y \in V_1 \text{ et } y \in V_2 \end{cases} \Rightarrow x+y \in V_1 \text{ et } x+y \in V_2$ (car V_1 et V_2 sont des s-esp-vect de E) 0,75

$\Rightarrow x+y \in V_1 \cap V_2$.

• $x \in V_1 \cap V_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on déduit que $x \in V_1$ et $x \in V_2$

et comme $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda x \in V_1$ et $\lambda x \in V_2$ 0,75

$\Rightarrow \lambda x \in V_1 \cap V_2$.

Ainsi $V_1 \cap V_2$ est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 1 : (8 pts)

$$f(x,y,z) = (x+2z, y, y+z)$$

1- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \underbrace{f((x,y,z)+(x',y',z'))}_{①} \overset{?}{=} f(x,y,z) + f(x',y',z')$ 0,25

① $= f(x+x', y+y', z+z') = (x+x'+2z+2z', y+y', y+y'+z+z')$ 0,25

$= (x+2z, y, y+z) + (x'+2z', y', y'+z') = f(x,y,z) + f(x',y',z')$

- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda(x,y,z)) \overset{?}{=} \lambda f(x,y,z)$ 0,25

$f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + 2\lambda z, \lambda y, \lambda y + \lambda z)$ 0,25

$= \lambda f(x,y,z)$ d'où f est linéaire

2- $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,0)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,1)$ 0,5

$f(e_3) = f(0,0,1) = (2,0,1)$

3- $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

4- comme $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A_{f^2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

5- $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ 0,25 $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x+2z, y, y+z) = 0\}$ (*)

(*) $\Rightarrow \begin{cases} x+2z = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 0 \\ y+z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$ 0,25 d'où $\ker f = \{(0,0,0)\}$ 0,25

$\dim \ker f = 0$ 0,25 $\Rightarrow f$ est injective 0,25

$\operatorname{Im} f = \{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$ 0,25 $= \{(x+2z, y, y+z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{x\underbrace{(1,0,0)}_{u} + y\underbrace{(0,1,1)}_{v} + z\underbrace{(2,0,1)}_{w} / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$ 0,25

d'où $\operatorname{Im} f = \langle\{u,v,w\}\rangle$ 0,25 et comme $\{u,v,w\}$ est libre 0,25

alors $\{u,v,w\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et $\dim \operatorname{Im} f = 3$ 0,25

donc $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$ 0,25 alors $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

d'où f est surjective.

6. Théorème de rang : $\underbrace{\dim \ker f}_{0} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{3} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3}$ 0,5 0,25

7. comme $\operatorname{card} B' = \dim \mathbb{R}^3$ 0,25 il suffit de montrer que B' est libre. On pose $\forall \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ $\lambda(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ 0,25

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \lambda = 0 \\ \beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow B'$ est libre 0,5

$\Rightarrow B'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

8. $e'_1 = (1,0,0) = e_1$

$e'_2 = (1,1,0) = e_1 + e_2$

$e'_3 = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$

d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

9. $f(e'_1) = (1,0,0)$

$f(e'_2) = (1,1,1)$ 0,25

$f(e'_3) = (3,1,2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 0,25

Exercice 2 : 3 pts $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 0,5 $= A + 2I$ 0,5

b) On a $A^2 = A + 2I \Leftrightarrow A^2 - A - 2I = 0$

$\Leftrightarrow A(A - I) = 2I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}(A - I)\right) = I$ 1

$\Rightarrow A$ est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$ 0,5

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 0,5

Exercice 3 (: 6 pts)

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 12 \\ 2x + ay + 2z = 5 \\ -x + y = -8 \end{cases} \quad (1)$$

i) L'écriture matricielle : $AX = B$ avec (0,1 ✓)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (0,2 ✓)} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ (0,2 ✓)} \quad \text{et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ii) calcul du rang :

$\det A = (2 + a)$ (0,2 ✓)

- Si $a \neq -2$, $\det A \neq 0$ $\Rightarrow$ rang $A = 3$ (0,1 ✓)
- Si $a = -2$, $\det A = 0$ (0,1 ✓) $\Rightarrow$ rang $A \leq 2$

et comme $\det \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$ alors rang $A = 2$ (0,2 ✓)

iii) (1) est un système de Cramer ssi $\det A \neq 0$ (0,1)
alors si $a \neq -2$ (1) est un système de Cramer (0,1 ✓)

iiii) pour $a = -3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$\det A = -1$ (0,1 ✓)

$A_1 = \begin{pmatrix} 12 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A_1 = -11$, $x = \dfrac{\det A_1}{\det A} = 11$ (0,75)

$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -8 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A_2 = -3$, $y = \dfrac{\det A_2}{\det A} = 3$ (0,7 ✓)

$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 12 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$, $\det A_3 = 4$, $z = \dfrac{\det A_3}{\det A} = -4$ (0,7 ✓)