

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
DEPARTEMENT DE M.I

SEMESTRE 1 - 2016-2017

1<sup>er</sup> EXAMEN - ALGEBRE 1

Janvier 2017

Durée: 1h30m

Exercice 1

I. Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  et  $A = \{0, \frac{1}{2}, 2\}$

- Déterminer  $f(A)$ . L'application  $f$  est-elle injective?
- L'application  $f$  est-elle surjective?

II. Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Montrer que pour toute partie  $B$  de  $F$

$$\text{Si } f \text{ est surjective alors } f(f^{-1}(B)) = B.$$

Exercice 2 Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mathfrak{R}$  une relation binaire définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = \lambda(x^2 - y^2)$$

- Montrer que  $\mathfrak{R}$  est une relation d'équivalence.
- On pose  $\lambda = 7$ , déterminer la classe d'équivalence de 6.

Exercice 3

I. Soient  $H = ]-1, 1[$  et  $(H, *)$  un groupe abélien où  $*$  est définie sur  $H$  par:

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab}$$

Montrer que l'application  $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (H, *)$  définie par  $f(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$  est un homomorphisme de groupes.

II. Soient  $(G, *)$ ,  $(G', T)$  deux groupes et  $f : G \rightarrow G'$  un homomorphisme de groupes, montrer que

- $f(e) = e'$ , tel que  $e$  et  $e'$  sont les éléments neutres de  $(G, *)$  et  $(G', T)$  respectivement.
- $\forall x \in G, f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ , tel que  $x^{-1}$  est le symétrique de  $x$  par rapport à la loi  $*$ .

Exercice 4 Déterminer le pgcd  $D$  des polynômes  $A$  et  $B$  suivants

$$A(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1 \text{ et } B(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1.$$

exercice 2

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (A = ]0, +\infty[)$$

$$a. f(A) = \{f(x), x \in A\} = \left\{f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f(2)\right\}$$

$$= \left\{0, \frac{2}{5}\right\}$$

f injectivité:

• Comme  $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) = \frac{2}{5}$  ( $\frac{2}{5}$  possède deux  $x$  antécédents)

alors  $f$  n'est pas injective

• La surjectivité:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ? x \in \mathbb{R} \text{ tq } y = \frac{x}{1+x^2} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow yx^2 - x + y = 0, \quad \Delta = 1 - 4y^2$$

pour  $y = 1, \Delta = -3 < 0, \nexists x \in \mathbb{R} \text{ tq } y = 1$   
d'où  $f$  n'est pas surjective sur  $\mathbb{R}$ .

I.  $f$  est surjective  $\Rightarrow f(f^{-1}(B)) = B$ .

a)  $f(f^{-1}(B)) \subset B$  ?

soit  $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B), \text{ tq } y = f(x)$   
 $\Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow y \in B$  d'où l'inclusion

b)  $B \subset f(f^{-1}(B))$  ?

soit  $y \in B$  comme  $f$  est surjective alors  $\exists x \in E$  tq

$$y = f(x) \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$$

$\Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$  d'où l'inclusion et l'égalité.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \mathcal{R} x$$

$$\text{On a : } x^3 - x^3 = \lambda(x^2 - x^2)$$

$$0 = 0 \text{ d'où } x \mathcal{R} x$$

À la fois

Symétrie :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x^3 - y^3) = \lambda(x^2 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow -(x^3 + y^3) = -\lambda(y^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow y^3 - x^3 = \lambda(y^2 - x^2) \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$$

Transitivité :  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = \lambda(x^2 - y^2) \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{et } y \mathcal{R} z \Leftrightarrow y^3 - z^3 = \lambda(y^2 - z^2) \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) + (2) : (x^3 - y^3) + (y^3 - z^3) = \lambda(x^2 - y^2) + \lambda(y^2 - z^2)$$
$$\Rightarrow x^3 - z^3 = \lambda(x^2 - z^2) \Leftrightarrow x \mathcal{R} z$$

alors  $\mathcal{R}$  est réflexive, symétrique et transitive  
d'où elle est d'équivalence.

$$1) \lambda = 7 : \bar{6} = \mathcal{C}(6) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \mathcal{R} 6\} \text{ ou } \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 6^3 = 7(x^2 - 6^2)\}$$

$$x^3 - 6^3 = 7x^2 - (7)(36) \Leftrightarrow x^3 - 216 - 7x^2 + 252 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x-3)(x+2) = 0$$

$$\text{d'où } \bar{6} = \{6, 3, -2\}$$

$$f: (K, +) \rightarrow (H, *) \quad \eta \quad f(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$$

$f$  est un homomorphisme de groupes

$$f(a+b) = f(a) * f(b) ?$$

$$f(a+b) = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{e^{a+b} + e^{-a-b}} \quad (1)$$

l'autre part

$$f(a) * f(b) = \left( \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \right) * \left( \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}} \right)$$

$$= \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} + \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}}$$

$$= \frac{1 + \left( \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \right) \left( \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}} \right)}{\left( \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \right) \left( \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}} \right) + \left( \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}} \right) \left( \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \right)}$$

$$= \frac{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b})}{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})}$$

$$\frac{e^{a+b} + e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b}}{e^{a+b} + e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{a-b} - e^{b-a} - e^{-a-b}}$$

$$\frac{e^{a+b} + e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b}}{e^{a+b} - e^{a-b} - e^{b-a} + e^{-a-b}}$$

$$\frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{e^{a+b} + e^{-a-b}} = f(a+b)$$

d'où  $f$  est bien un homomorphisme de groupes.

$$f(x) \tau f(e) = f(e * e) \\ = f(e)$$

comme  $f$  est un homomorphisme de groupes

$$= f(e) \tau e$$

par régularité de  $f(e)$  dans  $G$

$$f(e) \tau f(e) = f(e) \tau e \Rightarrow f(e) = e$$

$$- f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} ?$$

$$1a. f(x) \tau f(x^{-1}) = f(x + x^{-1}) = f(e) = e$$

$$\text{on peut } f(x^{-1}) \tau f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e) = e$$

$$\text{d'où } f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$$

exercice 4 (105)

on utilise l'algorithme d'Euclide

$$\begin{cases} R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1} \\ R_0 = A \text{ et } R_1 = B \end{cases}$$

$n > 1$   
~~Q~~

$$A = B Q_1 + R_2$$

$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \quad | \quad x^5 - x^4 + 2x^2 - 2x + 1$$

$$x^5 + x^4 - 2x^2 + 2x - 1$$

$$2x^3 - 4x^2 + 4x - 2$$

$$\text{on } A = B \times \underbrace{1}_{Q_1} + \underbrace{(2x^3 - 4x^2 + 4x - 2)}_{R_2}$$

$1 \nmid$

$R_2 \neq 0$

$$B = R_2 Q_2 + R_3$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 - x^4 + 2x^2 - 2x + 1 \\
 -x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 \\
 \hline
 x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \\
 -x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x \\
 \hline
 x^2 - x + 1
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 2x^3 - 4x^2 + 4x - 2 \\
 \hline
 \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
 \text{1,5}
 \end{array}$$

d'où  $B = (2x^3 - 4x^2 + 4x - 2) \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) + \frac{x^2 - x + 1}{R_3}$

$R_2 = R_3 \cdot Q_3 + R_4$

$$2x^3 - 4x^2 + 4x - 2$$

$$-2x^3 + 2x^2 - 2x$$

$$-2x^2 + 2x - 2$$

$$2x^2 - 2x + 2$$

0

$$x^2 - x + 1$$

$$2x - 2$$

1

$R_4 = 0$  alors

PGCD =  $R_3 = x^2 - x + 1$

1,5