Chapitre 2

Les Fondements de l'optimisation sans contraintes

2.1 Définitions

On aborde le problème d'optimisation sans contrainte qui est normalement non-linéaire. Le problème est posé dans $\mathbb{R}^n$, donc

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \tag{2.1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Définition 2.1.

- *Un vecteur x^* de $\mathbb{R}^n$ est appellé minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$, s'il existe une boule $B(x^*, \rho)$ de centre x^* et de rayon $\rho > 0$, telle que*

$$\forall x \in B(x^*, \rho),\ f(x) \geq f(x^*).$$

- *Un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$ est un vecteur x^*de $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \geq f(x^*). \tag{2.2}$$

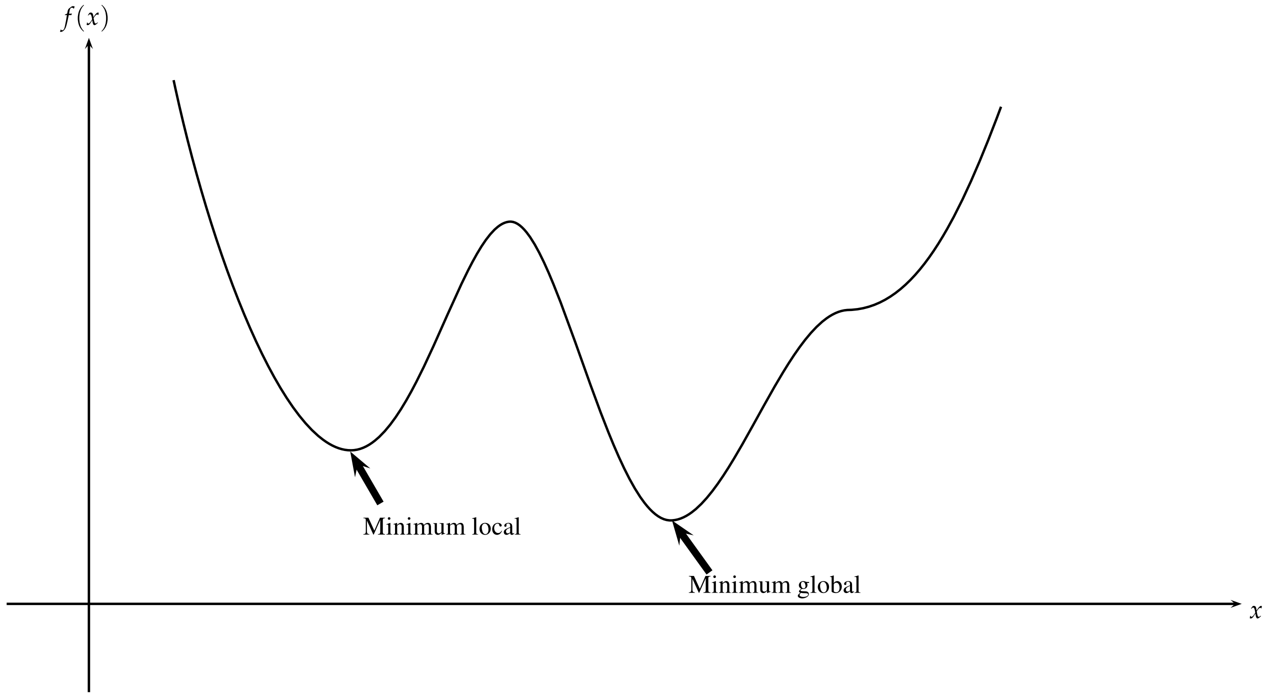

Figure 2.1: Les différents types de minimas.

Remarque 2.1. *En dehors de cas particulièrement favorable (il n'existe qu'un seul minimum ou bien on est dans le cas de la programmation linéaire continue, ou quadratique à matrice semi-définie positive, ou en programmation convexe), on devra se contenter de découvrir des minimas locaux de* f.

2.1.1 Principe général de résolution

Pour résoudre le problème (2.1), on applique un algorithme qui, d'un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, construit itérativement une suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, défini par

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \tag{2.3}$$

où, d_k est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ appelé direction et t_k une valeur réelle non nulle qu'on appel le pas. Le choix du vecteur d_k et le scalaire t_k détermine le type d'algorithme utilisé pour résoudre (2.1) ainsi que la convergence et la vitesse de convergence de la suite $\{x_k\}$ engendrée par l'algorithme.

Définition 2.2. *Soit d un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout t dans l'intervalle $]0, \delta[$, on a*

$$f(x + td) < f(x),$$

alors le vecteur d est dit une direction de descente en x.

Théorème 2.1. *Si f est différentiable en un point $x \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$ telle que*

$$g(x)^\top d < 0. \tag{2.4}$$

Alors d est une direction de descente en x.

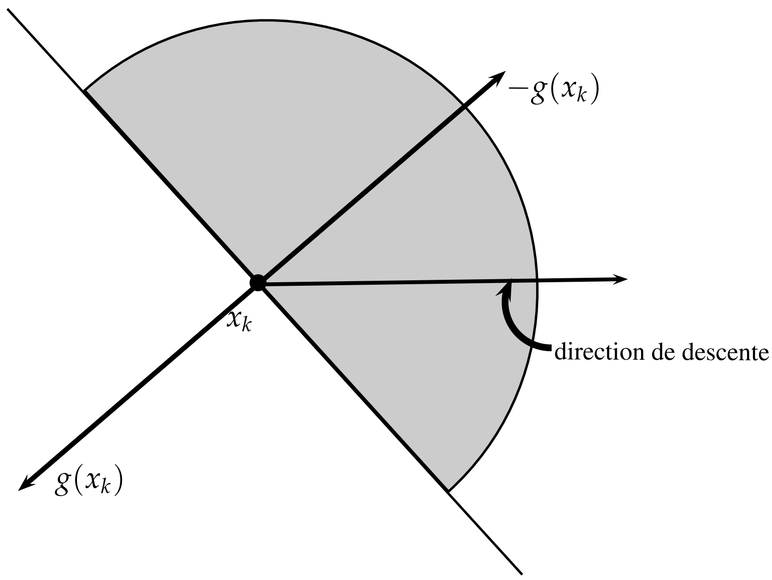

Figure 2.2: Cône des directions de descente.

2.2 Conditions d'optimalité

Les conditions d'optimalité d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ sont des équations, des inéquations ou des propriétés que vérifient les solutions de (2.1) (conditions nécessaires) ou qui assurent à un point d'être solution de (2.1) (conditions suffisantes). Ces conditions sont utiles pour

- Vérifier l'optimalité éventuelle d'un point $x \in \mathbb{R}^n$, voir si c'est un minimum, un maximum ou un point stationnaire.

- Calculer les solutions de (2.1).
- Élaboré des méthodes numériques permettant de résoudre (2.1).
- Définir des tests d'arrêt des itérations dans les algorithmes de résolution de (2.1).

2.2.1 Le cas différentiable

Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre

Théorème 2.2. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ est minimum local, alors*

$$g(\bar{x}) = 0. \tag{2.5}$$

Démonstration.

Par l'absurde, en supposant que $g(\bar{x}) \neq 0$ et on prend $d = -g(\bar{x})$ qui est une direction de descente (car $g(\bar{x})^\top d = -\|g(\bar{x})\|^2 < 0$) et d'après la définition 2.1, $\bar{x}$ n'est pas un optimum local.

□

Ces conditions ne sont pas suffisantes. En effet la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ considérée sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$, vérifie $f(\bar{x}) = 0$ en $\bar{x} = (0, 0)$, cependant ce point n'est pas un optimum local, mais un point de selle (voir figure 2.3).

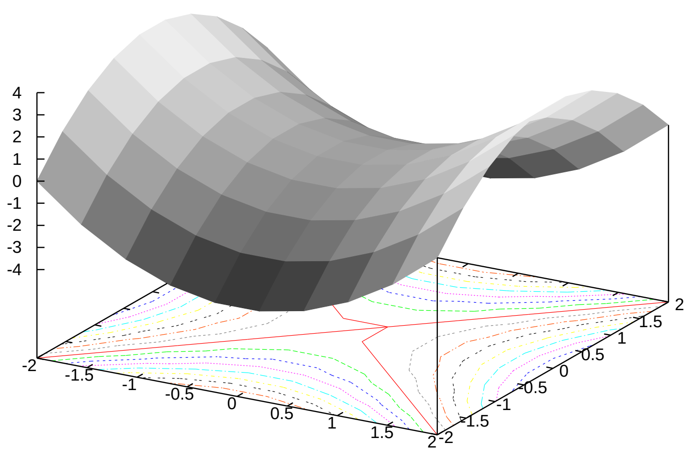

Figure 2.3: Une fonction avec un point selle en $(x, y) = (0, 0)$.

Conditions nécessaires d'optimalité du second ordre

Théorème 2.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $\bar{x}$ et supposant que $\bar{x}$ soit un minimum local. Alors $g(\bar{x}) = 0$ et $H(\bar{x})$ est semi-définie positive.*

Démonstration.

Le premier point est le résultat du théorème précédent. Le deuxième se démontre par contradiction. Supposons que $H(\bar{x})$ n'est pas SDP. Alors, on peut choisir un vecteur d tel que $d^\top H(\bar{x})d < 0$. En utilisant le développement de Taylor au voisinage de $\bar{x}$, il existe un $\bar{t} \in> 0$ tel que pour tout $t \in]0, \bar{t}]$ on a

$$f(\bar{x} + td) = f(\bar{x}) + tg(\bar{x})^\top d + \frac{1}{2}t^2\, d^\top H(\bar{x})d < f(\bar{x}).$$

□

Moyennant un léger renforcement, les conditions du théorème précédent s'avèrent suffisantes pour garantir un minimum local.

Conditions suffisantes d'optimalité du second ordre

Théorème 2.4. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $\bar{x}$. Si $g(\bar{x}) = 0$ et $H(\bar{x})$ est définie positive, alors $\bar{x}$ est un minimum local strict.*

Démonstration.

Choisissons $\epsilon > 0$ assez petit de sorte que pour tout $x \in B(x^*, r) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - x^*\| < \epsilon\}$ on a

$$f(x) = f(x^*) + g(x^*)^\top(x - x^*) + \frac{1}{2}\,(x - x^*)^\top H(x^*)(x - x^*) = f(x^*) + \frac{1}{2}\,(x - x^*)^\top H(x^*)(x - x^*),$$

puisque $H(x^*)$ est défini positif, alors

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2}\,d^\top H(x^*)d > 0 \Rightarrow f(x) > f(x^*).$$

□

2.2.2 Le cas convexe

La convexité est d'un grand intérêt, car elle permet une caractérisation globale des extremums et elle permet aussi d'énoncé des résultats en absence de la différentiabilité.

Définition 2.3. *Une fonction f définie sur un ensemble convexe X, est dite convexe si $\forall x_1, x_2 \in X$, et $\forall \alpha \in]0,1[$ on a*

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2). \tag{2.6}$$

Elle est dite strictement convexe si $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ et $\forall \alpha \in]0,1[$ on a

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2). \tag{2.7}$$

Lorsqu'une fonction est différentiable, il y a d'autre manières de caractériser la convexité.

Caractérisation de la convexité

Théorème 2.5. *Soit X un sous-ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$,*

1. *Si f est de classe C^1, alors f est convexe sur X si et seulement si*

$$f(x_2) \geq f(x_1) + g(x_1)^\top (x_2 - x_1), \forall x_1, x_2 \in X. \tag{2.8}$$

2. *Si f est de classe C^2, alors f est convexe sur X si et seulement si $H(x)$ est semi-définie positive dans tout X,*
3. *Si $H(x)$ est définie positive sur X alors f est strictement convexe sur X.*

Conditions suffisantes d'optimalité du premier ordre

La convexité permet d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour des minimas globaux.

Théorème 2.6. *On suppose que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$, alors*

1. *Tout minimum local est aussi un minimum global.*

2. *Si f est différentiable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et si*

$$g(\bar{x}) = 0. \tag{2.9}$$

alors $\bar{x}$ est un minimum global.

Démonstration.

1. Soit $\bar{x}$ un minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$. S'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) < f(\bar{x})$, on peut écrire par convexité de f (pour $\alpha \in]0,1]$)

$$f(\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(\bar{x}) < f(\bar{x}),$$

ce qui contredit le fait que $\bar{x}$ est un minimum local.

2. Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(\bar{x}) = 0$. Pour tout point $x \neq \bar{x}$ dans $\mathbb{R}^n$, la convexité de f permet d'écrire

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + g(\bar{x})^\top (x - \bar{x}),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

Si de plus on a $g(\bar{x}) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq f(\bar{x})$. Donc $\bar{x}$ est bien un minimum global.

□

Remarque 2.2. *Les théorèmes 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6 restent valables si $\mathbb{R}^n$ est remplacé par un ensemble X, ouvert (et convexe pour le théorème 2.6).*

2.3 Algorithmes

Considérons maintenant le problème non linéaire sans contraintes (2.1), où l'on suppose que f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

2.3.1 Existence

Le fait que f soit minorée n'implique pas l'existence d'une solution à (2.1).

Exemple 2.1. *f est minorée par 0 mais on ne peut jamais obtenir $x \in \mathbb{R}$, tel que $f(x) = 0$.*

Il faut donc une hypothèse de plus, le lemme suivant va dans ce sens.

Lemme 2.1. *Soit f une fonction de classe C^2, s'il existe une constant $m > 0$ vérifiant*

$$d^\top H(x)d \geq m \|d\|^2 ; \forall x, d \in \mathbb{R}^n.$$

Alors, pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq f(y)\}, \tag{2.10}$$

est convexe et compact.

***Démonstration*.**

La fermeture de l'ensemble est une conséquence de la continuité de la la fonction f, même chose pour la convexité de l'ensemble résulte du fait que f l'est aussi. Par conséquent nous avons juste à prouver que l'ensemble est borné. Prenons d un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\|d\| = 1$. Soit la fonction réelle θ définie par

$$\theta(t) = f(y + td).$$

A partir des conditions sur f et la normalisation de d, on en déduit l'inégalité

$$\theta''(t) \geq m,$$

d'où il suit que la fonction définie par

$$\psi(t) = \theta(t) - \theta(0) - td^\top g(y) - \frac{1}{2}t^2 m.$$

est convexe. Maintenant ψ est choisie pour satisfaire $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, donc on en déduit l'inégalité

$$\theta(t) \geq \theta(0) + td^\top g(y) + \frac{1}{2}t^2 m.$$

Mais le côté droit de cette inégalité est plus grand que

$theta(0)$ si

$$|t| > 2\frac{\|g(y)\|}{m} \geq 2\frac{|d^\top g(y)|}{m}.$$

Par conséquent, et puisque le vecteur d est arbitraire, $f(x) \geq f(y)$ si $\|x-y\| > 2\frac{\|g(y)\|}{m}$. Par conséquent l'ensemble des points x satisfaisant la condition $f(x) < f(y)$ est borné.

□

Remarque importante : Théoriquement, le but d'un algorithme de minimisation est l'identification d'un minimum, dans la pratique on est plus modeste, on se contente souvent de chercher un point stationnaire (c'est-à-dire un point qui vérifie l'équation (2.5)).

2.3.2 La méthode du gradient

On se propose de trouver une solution du problème (2.1). On remplace, $f(x+d)$ par $f(x)+g(x)^\top d$ (ce qui est possible pour $\|d\|$ assez petit), Donc

$$f(x+d) = f(x) + g(x)^\top d. \tag{2.11}$$

Soit d_k une solution du problème approché correspondant

$$\begin{cases} min\ g(x_k)^\top d, \\ \|d\| \leq 1, \end{cases} \tag{2.12}$$

ensuite x_{k+1} est rechercher le long de d_k c'est à dire

$$x_{k+1} = x_k + td_k.$$

Remarque 2.3.

- *La contrainte $\|d\| \leq 1$ est essentielle pour assurer une solution à (2.12) mais la longueur de la direction n'a aucune importance (on peu prendre $\|d\| \leq a$), car elle sera corrigée par le choix du pas t.*
- *Il est possible de de résoudre (2.12) suivant le choix de la norme $\|.\|$.*

Cas de la norme l^1

Dans ce cas, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|$. L'ensemble $S = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \|d\|_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i| \leq 1 \right\}$ est un polyèdre de sommées

$$E = \{e_1, e_2, ..., e_n, -e_1, -e_2, ..., -e_n\},$$

où $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

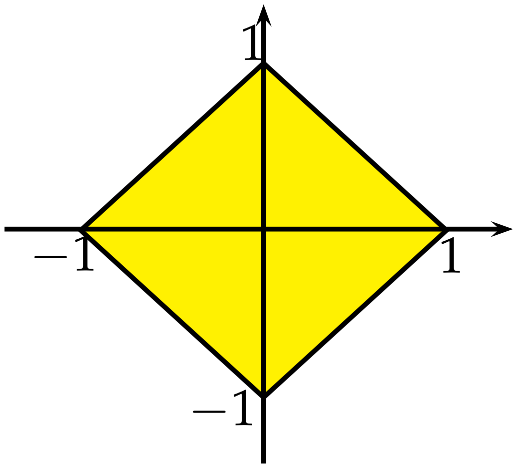

Figure 2.4: L'ensemble S dans $\mathbb{R}^2$

Puisque la fonction : $d \to g(x_k)^\top d$ est linéaire alors le problème (2.12) est équivalent au problème d'optimisation linéaire (voir [2, 22])

$$\begin{cases} \min \ g(x_k)^\top d, \\ d \in E. \end{cases}$$

Et donc

$$(2.12) \iff \min_{1 \leq i \leq n} \{g_i(x_k), -g_i(x_k)\}$$

tel que, $g(x_k) = (g_1(x_k), ..., g_n(x_k))$, donc

$$d_k = (0, 0, .., \varepsilon_i, 0, .., 0) = \varepsilon_i e_i,$$

où i et ε_i est donné par

$$\begin{cases} g_i(x_k) = \max\left\{\left|g_j(x_k)\right|; 1 \leq j \leq n\right\} \\ \varepsilon_i = -\dfrac{g_i(x_k)}{|g_i(x_k)|}. \end{cases}$$

Graphiquement la solution d_k est parallèle à un certain axe de coordonnées (correspondant à la plus grande composante du gradient). Posant $\theta(t) = f(x_k + td_k)$ et cherchons t_k une solution du problème

$$\min_{t>0} \theta(t).$$

L'idée immédiate est de chercher une solution de

$$\theta'(t) = \frac{d}{dt} f(x_k + td_k) = g(x_k + td_k)^\top d_k = 0,\ t > 0. \tag{2.13}$$

Or d_k est l'un des vecteurs de base (à un signe près), ce qui donne

$$\begin{aligned} g(x_k + td_k)^\top d_k &= g(x_k + \varepsilon_i te_i)^\top (\varepsilon_i e_i) \\ &= \varepsilon_i g_i(x_k + \varepsilon_i te_i) = 0,\ i = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

C'est donc résoudre une seule composante du gradient, ce qui nous donne une interprétation de la méthode Gauss-Seidel. Maintenant on choisis parmi les solutions t_k possible celle qui donne

$$f(x_k + t_k d_k) < f(x_k).$$

Cas de la norme l^2

Dans ce cas $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2}$. Abordant un Lemme essentiel pour la suite.

Lemme 2.2. *Supposant que f est différentiable en x tel que $g(x) \neq 0$. Alors le problème d'optimisation*

$$\begin{cases} \min\ g(x)^\top d \\ \quad \|d\| \leq 1 \end{cases}$$

admet une solution $d_k = -\dfrac{g(x_k)}{\|g(x_k)\|}$

- *On peut prendre* $d_k = -g(x_k)$ *selon la remarque précédente*
- *Comme auparavant, posons* $\theta(t) = f(x_k + td_k)$ *et cherchons* t_k *une solution de*

$$\min_{t>0} \theta(t), \tag{2.14}$$

telle que $\theta(t_k) < \theta(0)$

L'algorithme de la plus profonde descente (Steepest Descent)

(i) $d_k = -g(x_k)$

(ii) t_k solution de

$$\min_{t>0} \theta(t)$$

qui vérifie

$$\theta(t_k) < \theta(0)$$

(iii) $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$

Remarque 2.4. *La méthode (i), (ii), (iii) donne une interprétation directe de la méthode des approximations successive vue en (1.5.2) de plus, (ii) permet de calculer avec précision le pas* t_k*, contrairement au théorème 1.4.*

- *La contrainte* $t > 0$ *est justifier par le fait que si* $t_k = 0$

$$\theta'(0) = g(x_k)^\top d_k = g(x_k)^\top(-g(x_k)) = -\|g(x_k)\|^2 = 0 \Rightarrow g(x_k) \equiv 0$$

et on aura $x_{k+1} = x_k$

- *Dans les deux cas (la norme* l^1 *ou* l^2*) on voit bien que le vecteur* d_k *est une direction de descente puisque* $g(x_k)^\top d_k < 0$

2.3.3 Étude globale de la convergence

Il est plus intéressant de démontrer la convergence d'une variante de la méthode (i),(ii),(iii) où le pas t_k est calculé de façon plus général, considérons au lieu de (ii)

(ii') t_k est tel que

$$\theta(t_k) \leq \theta(t_k^*), \tag{2.15}$$

où t_k^* est la plus petite solution de (2.14)

Pour la convergence de cette méthode, nous reprenons une proposition dù à [3].

Proposition 2.1. *On suppose le gradient g lipschitzien sur la tranche*

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}.$$

Alors la méthode définie par (i), (ii') et (iii), satisfait à

- *Soit $f(x_k)$ est non bornée inférieurement.*
- *Soit $g(x_k) \to 0$.*

Démonstration. Observons que $\theta(t)$ est décroissante sur $]0, t_k^*]$ puisque

$$\begin{cases} \theta'(0) < 0 \\ \theta'(t) \text{ continue } (g \text{ continue}) \\ t_k^* \text{ est le premier zero de } \theta'(t) = 0,\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta'(t) < 0,\ \forall t \in]0, t_k^*]$$

Donc t_k^* est le plus petit minimum de $\theta(t)$, $t > 0$ Si on pose $x^* = x_k + t_k^* d_k$, on a : $x^*, x_k \in \mathcal{L}$ (par construction).

(1) On va montrer que dans le voisinage de $t = 0$, $f(x_k + td_k)$ décroit sensiblement. Prenons $z = x_k + td_k$, $t > 0$ assez petit de façon à ce que $z \in \mathcal{L}$, la formule de la moyenne pour z' entre x_k et z donne

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x_k) + g(z')^\top (z - x_k) = f(x_k) + (g(z') - g(x_k))^\top (z - x_k) + \\ &\quad + g(x_k)^\top (z - x_k). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Puisque $z' \in \mathcal{L}$, du fait que $z' = x_k + \tau d_k$, $\tau \in]0, t]$, alors

$$f(z') \leq f(z) \leq f(x_k)$$

g est lipschitzien sur $\mathcal{L}$ et grâce l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}(g(z') - g(x_k)^\top (z - x_k) &\leq \|g(z') - g(x_k)\| \, \|z - x_k\| \leq M \, \|z' - x_k\| \, \|z - x_k\| \\ &\leq M \, \|z - x_k\|^2 ,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}f(z) &\leq f(x_k) - \|g(x_k)\| \, \|z - x_k\| + M \, \|z - x_k\|^2 , \\ f(z) &\leq f(x_k) + (M \, t^2 - t) \, \|g(x_k)\|^2 ,\end{aligned}$$

Si on prend $t \leq \dfrac{1}{2M}$, alors $M \, t^2 \leq t/2$ et donc pour $t \leq \min\{t_k^*, \dfrac{1}{2M}\}$, on a

$$f(z) \leq f(x_k) - \frac{t}{2} \, \|z - x_k\| .$$

Ce qui démontre (1).

(2) Minoration de t_k. Soit $x^* = x_k + t_k^* d_k$, On a $g(x^*)^\top d_k = \theta'(t_k^*) = 0$. Donc

$$0 = g(x^*)^\top (x^* - x_k) = (g(x^*) - g(x_k))^\top (x^* - x_k) + g(x_k)^\top (x^* - x_k).$$

En utilisant les mêmes techniques qu'en (1), on obtient

$$0 \leq \|x^* - x_k\| \, [M \, \|x^* - x_k\| - \|g(x_k)\|]$$

et donc

$$\|x_{k+1} - x_k\| \geq \|x^* - x_k\| \geq \frac{\|g(x_k)\|}{M}.$$

Puisque

$$0 < t_k^* \, \|g(x_k)\| = \|x^* - x_k\| \leq \|x_{k+1} - x_k\| = t_k \, \|g(x_k)\| ,$$

du fait que $t_k^* \leq t_k$ (rappelons que θ est décroissante dans $]0, t_k^*]$ et de (ii')).

D'où (2) à savoir

$$\|x_{k+1} - x_k\| \geq \|x^* - x_k\| \geq \frac{\|g(x_k)\|}{M}.$$

Maintenant, prenons $t \leq \frac{\|g(x_k)\|}{2M} \Rightarrow z = x_k + td_k$ d'après (2), z est entre x_k et x^* donc

$$z = x_k + td_k,\ t \in]0, t_k^*] \Rightarrow f(z) = \theta(t) \geq \theta(t_k^*) = f(x^*).$$

Et de (ii') on a

$$f(x_{k+1}) = \theta(t_k) \leq \theta(t_k^*) = f(x^*),$$

ce qui donne

$$f(x_{k+1}) \leq f(x^*) \leq f(z) \Rightarrow f(x_{k+1}) \leq f(z). \tag{2.17}$$

De l'argument (1) et (2.17)

$$f(z) \leq f(x_k) - \frac{\|g(x_k)\|^2}{4M},$$

donc $\|g(x_k)\|^2 \leq 4M[f(x_k) - f(z)] \leq 4M[f(x_k) - f(x_{k+1})]$, ce qui implique

$$\sum_{i=1}^{i=k} \|g(x_i)\| \leq 4M[f(x_1) - f(x_{k+1})].$$

Si f est bornée inférieurement on a $[f(x_1) - f(x_{k+1})] \leq C, \forall k \in \mathbb{N}^*$ ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \|g(x_i)\| \leq C \Rightarrow g(x_k) \rightarrow 0.$$

□

2.3.4 Etude locale de la convergence

Maintenant, on va analyser la convergence locale de cette méthode, c'est-à-dire la vitesse de convergence des suites générées par l'algorithme au voisinage du point optimum.

Théorème 2.7. *Si f est quadratique de la forme $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx - b^\top x$, avec $Q \in \mathcal{M}_n$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$, la méthode "steepest descent" (i),(ii),(iii), converge vers la solution du problème avec une vitesse linéaire de rapport*

$$r = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1},$$

où $\lambda_n = \max(\sigma(Q))$ *et* $\lambda_1 = \min(\sigma(Q))$.

Démonstration. La condition suffisante d'optimalité (CS2) permet d'identifier la solution de (2.1), il suffis de résoudre l'équation (2.13), ce qui donne

$$t_k = \frac{g(x_k)^\top g(x_k)}{g(x_k)^\top Q g(x_k)}. \tag{2.18}$$

Avec un calcul simple, on trouve

$$f(x_{k+1}) = \left[1 - \frac{(g(x_k)^\top g(x_k))^2}{(g(x_k)^\top Q g(x_k))(g(x_k)^\top Q^{-1} g(x_k))}\right] f(x_k) \tag{2.19}$$

En utilisant (iii) et grâce à l'inégalité de Kantorovich [22]

$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_Q^2 \, \|x\|_{Q^{-1}}^2} \geq \frac{4\lambda_1\lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}$$

on a

$$f(x_{k+1}) \leq \left[\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right]^2 f(x_k). \tag{2.20}$$

□

Remarque 2.5. *L'inégalité (2.10) montre que la vitesse de convergence de la suite* $\{f(x_k)\}$ *est linéaire, et elle dépend clairement du rapport* $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$. *Si ce dernier est très grand (dans le cas d'une matrice* Q, *malle conditionnée) le terme*

$$\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$$

s'approchera du 1 donc, la convergence est sous-linéaire.

Dans un cadre plus général (fonction f non-linéaire), l'analyse précédente reste valable, car en s'approchant de l'optimum x^*, la fonction f peut être approximée quadratiquement par

$$f(x) \approx f(x^*) + g(x^*)^\top (x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^\top H(x^*)(x - x^*)$$

où le hessien $H(x^*)$ est maintenant définie positive.

Algorithme 2.1.

Etape 0 (Initialisation) : x_0 *et* $\varepsilon > 0$ *donnée,* $k = 0$

Etape 1 : *Test d'arrêt : calculer* $g(x_k)$*, si* $\|g(x_k)\| < \varepsilon$ *alors stop sinon*

Etape 2 : *Calcul de la direction* $d_k = -g(x_k)$

Etape 3 : *Recherche linéaire : Trouver* t_k *qui vérifie "les bonnes hypothèses" en particulier* $f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$

Etape 4 : *Si la recherche linéaire réussie* $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$*, remplacer* k *par* $k+1$ *et aller en 1.*

Remarque 2.6. *Dans ce schéma, tout est clair sauf l'étape 3, qui ne dit ni quelle condition précise doit vérifier le pas* t_k*, ni comment le trouver. La recherche du pas s'effectue en fait par une sous-itération sur* $t > 0$ *durant laquelle s'établit un dialogue avec un sous programme qui se charge de calculer* t_k*. Le problème de la recherche linéaire est suffisamment important pour justifier le chapitre suivant à lui tout seul.*

Exercices

Exercice 2.1. *Calculer le gradient* $g(x)$ *et le hessien g(x) de la fonction Rosenbrock*

$$f(x) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Montrer que $x^* = (1\,,\,1)^T$ *est le seul minimum local de cette fonction Montrer que la fonction* $f(x) = 8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$ *a un seul point stationnaire, et que ce n'est ni un maximum et ni un minimum, mais un point de selle. "Croquiser" les courbes à niveaux de* f *.*

Exercice 2.2. *Considérons la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \|x\|^2$*. Montrer que la suite d'itérations* $\{x_k\}$ *définie par*

$$x_{k+1} = (1 + \frac{1}{2^k}) \begin{pmatrix} cos(k) \\ sin(k) \end{pmatrix},$$

satisfait $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, $k = 1, 2, ...$*que tout point sur le cercle unité* $\{x : \|x\| = 1\}$ *est un point limite de* $\{x_k\}$*. Astuce : Chaque valeur* $\theta \in [0\,,\,2\pi]$ *est un point limite de la sous-suite*

$$\xi_i = k\,(mod\,2\pi) = k - 2\pi \left[\frac{k}{2\pi}\right],$$

où l'opérateur $[\,.\,]$ *est la partie entière d'un réel.*

Exercice 2.3. *Montrer que tous les minimas locaux isolés sont strictes.*

Exercice 2.4. *Supposons que* f *est une fonction convexe. Montrer que l'ensemble des minimas globaux de* f *est un ensemble convexe.*

Exercice 2.5. *Considérons la fonction* $f(x_1\,,\,x_2) = (x_1 + x_2^2)^2$*. Au point* $x^T = (1\,,\,0)$*, nous considérons la direction* $d^T = (-1\,,\,1)$*. Montrer que* d *est une direction de descente et trouver toutes les minimas du problème*

$$\min_{t>0} f(x + t\,d).$$

Exercice 2.6. *Supposons que* $\tilde{f}(z) = f(x)$*, où* $x = Sz + s$ *pour un certain* $S \in \mathbb{R}^{n\times m} = \mathcal{M}^{n\times m}$ *et* $s \in \mathbb{R}^n$*. Monter que*

$$\tilde{g}(z) = \nabla \tilde{f}(z) = S^T \nabla f(x), \;\; \tilde{H}(z) = \nabla^2 \tilde{f}(z) = S^T H(x) S.$$