UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
DEPARTEMENT DE M.I

ALGEBRE II

SEMESTER II 2015/2016

Date: LUNDI 16 MAI 2016 Time: 10H00-11H30 (reading time)

Exercice1
1. Montrer que les vecteurs $u = 1+i$ et $v = 1-i$ sont libre dans $\mathbb{R}-\mathbb{C}$ espace vectoriel..
2. Sont-ils libre dans $\mathbb{C}-\mathbb{C}$ espace vectoriel ?
3. Pourquoi la famille $S = \{0, 1, X\}$ est liée dans $E = f(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que si f est une application linéaire, alors $f(0) = 0$.

Exercice2 Soit E le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u_1 = (2,1,0)$, $u_2 = (-1,0,1)$ et $u_3 = (4,1,-2)$. Soit $F = \{(0,\ x+y,\ -y),\ x,\ y \in \mathbb{R}\}$.

1. Déterminer une base et la dimension de E.
2. Démontrer que F est un SEV de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base et la dimension.
3. Déterminer une base et la dimension du SEV $E \cap F$.
4. Déduire $dim\,(E+F)$ sans donné la forme générale d'un vecteur du SEV $E+F$.

Exercice3 Soient $\mathbb{R}_2[X] = \{a + bX + cX^2,\ a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré inferieur ou égale 2 et $B = \{1,\ X,\ X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit maintenanat l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\rightarrow f(P) = (X+1)\,P' + P. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un application linéaire.
2. Déterminer la matrice A_f associée à f par rapport aux bases B et B puis calculer A_f^{-1}.
4. Montrer que $B' = (1,\ X+1,\ -X^2+2X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Trouver la matrice B_f associée à f par rapport aux bases B' et B'.

Corrigé

Exo1. Montrons que les vecteurs u et v sont linéairement independants dans $\mathbb{R}-\mathbb{C}$ espace vectoriel.

Soit 1) $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, alors, $\alpha u+\beta v=0 \Leftrightarrow \alpha(1+i)+\beta(1-i)=0$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)+i(\alpha-\beta)=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0,$$ 1

d'où $\{u,v\}$ est libre.

2) Dans le cas $\mathbb{C}-\mathbb{C}$, on a pour $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C},\quad \alpha u+\beta v=0$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1+i\alpha_2)(1+i)+(\beta_1+i\beta_2)(1-i)=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+\beta_1+\beta_2=0 \\ \alpha_1+\alpha_2-\beta_1+\beta_2=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=-\beta_2=0,$$ 1,5

donc, si on prend $\alpha_1=1,\ \alpha_2=0,\ \beta_1=0,\ \beta_2=-1$, on obtient $(1+i0)(1+i)+(0-i)(1-i)=(1+i)-i(1-i)=0$. Alors, la famille $\{u,v\}$ est liée.

3) La famille $\{1, X,\ X^2\}$ est liée car elle contient l'élément 0. 1

4) Montront que si f est une application linéaire, alors $f(0)=0$. Et comme

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$$

appartient a un espace vectoriel qui en fait un groupe et tout les éléments d'un groupe sont réguliers (simplifiable), alors 1,5

$$f(0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

Exo2.

1) Déterminons une base et la dimension de E qui engendré par la famille

$$\{u_1=(2,1,0)\,,\ u_2=(-1,0,1)\,,\ u_3=(4,1,-2)\,.\}\,.$$

Alors, soit $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$, alors, $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0$ implique

$$\alpha(2,1,0)+\beta(-1,0,1)+\gamma(4,1,-2) = (2\alpha-\beta+4\gamma,\ \alpha+\gamma,\ \beta-2\gamma)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta+4\gamma=0 \\ \alpha=-\gamma \\ \beta=2\gamma=-2\alpha \end{cases}$$ 0,5

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma=-\alpha \\ \beta=-2\alpha \end{cases}$$ 0,5

d'où, pour

$$\alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = -1$$

on a: $1\,(2,1,0) - 2\,(-1,0,1) - 1\,(4,1,-2) = (0,0,0)$, les vecteurs sont liées, Càd:

$$(4,1,-2) = (2,1,0) - 2\,(-1,0,1) \Leftrightarrow u_3 = u_1 - 2u_2.$$ 1

Etudions si la famille est libre $\{u_1, u_2\}$. Soit $\lambda u_1 + \delta u_2 = 0$, pour, alors, $\lambda\,(2,1,0) + \delta\,(-1,0,1) = (2\lambda - \delta,\ \lambda, \delta\,) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda = \delta = 0$. Alors, la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre et donc la dimension de E est 2 ($\dim E = 2$). 1,5

2) a) $F = \{(0,\ x+y,\ -y),\ \ x,\ y \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel **evidente.** 1

b) La dimension de F. On a

$$F = \{(0,\ x+y,\ -y),\ \ x,\ y \in \mathbb{R}\} = \{(0,\ x,\ 0) + (0,\ y,\ -y),\ \ x,\ y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x\,(0,\ 1,\ 0) + y\,(0,\ 1,\ -1),\ \ x,\ y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow F\,\langle (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ -1)\rangle.$$ 1

Vérifions si cette fmille est libre Alors, soit $\alpha,\ \beta,\ \in \mathbb{R}$, alors, $\alpha\,(0,\ 1,\ 0) + \beta\,(0,\ 1,\ -1) = 0$ implique $(0,\ \alpha+\beta,\ -\beta) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. Ils sont libre et dimF=2. 1

3) Déterminons une base et la dimension du SEV $E \cap F$.
Soit

$$u \in E \cap F \Rightarrow \begin{cases} u = (x,y,z) \in E \Rightarrow \exists \alpha \text{ et } \beta \text{ telles que } u = \alpha\,(2,1,0) + \beta\,(-1,0,1) = (2\alpha - \beta,\ \alpha,\ \beta\,) \\ u = (x,y,z) \in F \Rightarrow\ u = \lambda\,(0,\ 1,\ 0) + \delta\,(0,\ 1,\ -1) = (0,\ \lambda+\delta,\ -\delta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ \alpha - \ \lambda - \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ y = \alpha \\ -2\alpha = \delta = -2y \\ z = \beta = -\delta = 2\alpha \\ \alpha + \beta = \lambda \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = 2\alpha \end{array}$$ 1,5

$\Rightarrow$donc le vecteur $\alpha = (0,1,2) \in E \cap F$. Car le vecteur $(0,\ 1,\ 2) \in E$ et $(0,\ 1,\ 2) = 1\,(2,1,0) + 2\,(-1,0,1) \in F$. et la dimension de $E \cap F = 1$. 0,5

4) On a

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - 1 = 3.$$ 0,5

Exo3.

On a l'application

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \to f(P) = (X+1)\,P' + P.$$

1) Démontrons que f est linéaire

$\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \forall P_1,\ P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, ona:

$$f(\alpha P_1 + \beta P_2) = (X+1)(\alpha P_1 + \beta P_2)' + \alpha P_1 + \beta P_2 = (X+1)\,P_1' + P_1 + (X+1)\,P_2' + P_2$$ 1

d'où la linéairité de f .

2) La matrice A_f associée à f par rapport aux bases B et B.

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(X) = 1 + 2X \\ f(X^2) = 2X + 3X^2 \end{cases}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ 1,5

3) La matrice A_f^{-1} de la matrice A_f est donnée par

$$A_f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$ 1,5

0,5 4) Montrons que la famille B' forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Comme le $cardB' = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, il nous suffit de démontrer qu'ils sont libres. Soit $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$,alors,

$$\alpha + \beta(X+1) + \gamma(-X^2 + 2X + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + (\beta + 2\gamma)X - \gamma X^2 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$ 0,5

Ce qui implique que cette famille est libre.

5) Déterminons la matrice B_f associée à f par rapport aux bases B' et B'.

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(X+1) = (X+1).1 + (X+1) = 2(X+1) \\ f\left(-X^2+2X+1\right) = (X+1).\left(-2X+2\right) + \left(-X^2+2X+1\right) \\ = 3 + 2X - 2X^2 \\ = \alpha.1 + \beta(X+1) + \gamma\left(-X^2+2X+1\right) \\ \alpha+\beta+\gamma+(\beta+2\gamma)X - \gamma X^2 \end{cases}$$

Par comparaison on obteient:

$$\begin{cases} -\gamma = -2 \\ \beta + 2\gamma = 2 \\ \alpha+\beta+\gamma = 3 \end{cases} \Rightarrow \gamma = 2,\ \beta = -2 \text{ et } \alpha = 3$$

d'où

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1