Université Badji Mokhtar Annaba. Fac. des Sciences.
Département De Mathématique et Informatique.
LMD(1ère Année 2015-2016).

Examen de Rattrapage
Matière : - **ANALYSE 01** - Durée de l'épreuve : **1h30.**

EXERCICE 01 Soit la suite numérique $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.
1) Démontrer que u_n est divergente.
2) Considérant l'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ défini par

$$E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.
EXERCICE 02 Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^k \cos^3(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f.
EXERCICE 03
I) Résoudre l'équation suivante

$$\text{Arcsin}2x - \text{Arcsin}\sqrt{3}.x = \text{Arcsin}x.$$

II) Montrer que : si $0 < x < 1$ alors $x < \text{Arcsin}x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bon Courage

Ex. 1

1) Montrons que (U_n) est divergente :

$$U_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$$

• Soient les deux sous-suites (U_{2k}) et (U_{2k+1}) de (U_n) :

$$U_{2k} = 1 + \frac{1}{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N}$$

et $U_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+2}, \quad k \in \mathbb{N}$

On a : $\lim_{k \to +\infty} U_{2k} = 1 \neq \lim_{k \to +\infty} U_{2k+1} = -1 \Rightarrow (U_n)$ est div.

2) $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$

posons $A = \{U_{2k} : k \in \mathbb{N}\} = \{1 + \frac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{N}\}$

et $B = \{U_{2k+1} : k \in \mathbb{N}\} = \{-1 + \frac{1}{2k+2}, k \in \mathbb{N}\}$

d'où $E = A \cup B$

* Calculons $\inf A$ et $\sup A$:

• pour $k = 0$, $U_{2.0} = U_0 = 2 \in A \Rightarrow A \neq \phi$

• $\forall k \in \mathbb{N}$: $k \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2k+1} \leq 1 \Rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{2k+1} \leq 2$

alors $\forall k \in \mathbb{N} : 1 < U_{2k} \leq 2 \Rightarrow A$ est bornée

• A est bornée $\Rightarrow \exists \sup A$ et $\exists \inf A$:

• $U_0 = 2$ est le plus grand élément de $A \Rightarrow$

Max A = sup A = 2

• 1 est un minorant de A et on va montrer que $\inf A \overset{?}{=} 1$

En effet, si $\varepsilon > 0$ est donné, $\exists k \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq u_{2k} < 1+\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2k+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) < k$$

- Si $0 < \varepsilon \leq 1$: $\frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \geq 0$
  alors il suffit de prendre $k = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right] + 1 \in \mathbb{N}$
- •• Si $\varepsilon > 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) < 0$, il suffit de prendre $k = 0$

En résumé : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$: $1 \leq 1 + \frac{1}{2k+1} < 1+\varepsilon$

$$\Rightarrow \inf A = 1$$

** Calculons $\inf B$ et $\sup B$:

- pour $k = 0$: $u_1 = -\frac{1}{2} \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$
- $\forall k \in \mathbb{N}$ $k \geq 0 \Rightarrow -1 < -1 + \frac{1}{2k+2} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow$ B est bornée
- B est bornée $\Rightarrow \exists \sup B$ et $\exists \inf B$
- $u_1 = -\frac{1}{2}$ est le plus grand élément de B

$$\Rightarrow \operatorname{Max} B = \sup B = -\frac{1}{2}$$

- -1 est un minorant de B et on va montrer que $\inf B \stackrel{?}{=} -1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : -1 \leq u_{2k+1} < -1+\varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$, est donné $\exists$

$$-1 + \frac{1}{2k+1} < -1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2k+2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}\right) < k$$

- Si $1 - 2\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}\right) \geq 0$
  alors il suffit de prendre $k = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right] + 1 \in \mathbb{N}$
- Si $1 - 2\varepsilon < 0 \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}\right) < 0$
  il suffit de prendre $k = 0 \in \mathbb{N}$
- En résumé : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$: $-1 \leq u_{2k+1} < -1+\varepsilon$
  $\Leftrightarrow \inf B = -1$

* Calculons $\sup E$ et $\inf E$

· $A \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \neq \emptyset \Rightarrow E = A \cup B \neq \emptyset$

· A et B sont bornées $\Rightarrow A \cup B$ est bornée $\Rightarrow E$ est bornée

alors $\exists \sup E$ et $\inf E$ de plus

• $\sup E = \sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B) = \sup(2, -\frac{1}{2}) = 2$

• $\inf E = \inf(A \cup B) = \inf(\inf A, \inf B) = \inf(1, -1) = -1$

Ex. 2

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\bullet \text{ pour } x \neq 0}$

$\forall K \in \mathbb{N}$ x^K est continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ sur $\mathbb{R}^*$

$\begin{cases} \cos^3 x \text{ continue sur } \mathbb{R} \Rightarrow \text{ sur } \mathbb{R}^* \\ \frac{1}{x} \text{ continue sur } \mathbb{R}^* \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \cos^3 \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

alors $x^K \cos^3 \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

$\boxed{\bullet \text{ pour } x = 0}$:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0) = 0$

• Si $K \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to 0} x^K \cos^3 \frac{1}{x} = 0 = f(0)$ $\left(\begin{matrix} x^K \to 0 \\ \text{et} \\ |\cos^3 \frac{1}{x}| < 1 \text{ (bornée} \end{matrix} \right.$

alors f est continue en $0 = 0$

• Si $K = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} x^0 \cos^3 \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos^3 \frac{1}{x}$

Considérons la suite (X_n) définie par $X_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$X_n \longrightarrow 0$ et $f(X_n) = \cos^3 n\pi = (-1)^{3n} = \left((-1)^n\right)^3 = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ +1 \text{ } n \text{ est pair} \end{cases}$

ce qui entraîne que $f(X_n)$ est divergente

donc $\lim\limits_{x \to 0} \cos^3 \frac{1}{x}$ n'existe pas.

En résumé : f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $K \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{\text{EX3}}$ La résolution de l'équation : $\text{Arcsin}\,2x - \text{Arcsin}\,\sqrt{3}x = \text{Arcsin}\,x$

I) L'expression est définie

si $\begin{cases} -1 \leq 2x \leq 1 \\ \text{et} \\ -1 \leq \sqrt{3}\,x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ $\left(\text{puisque } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right)$

donc on cherche les solution dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

1$^{\text{re}}$ cas : $x = 0$ est une solution triviale : et $0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$\text{Arcsin}\,0 - \text{Arcsin}\,0 = \text{Arcsin}\,0$$
$$0 = 0$$

2$^{\text{e}}$ cas si $x \neq 0$

$$\text{Arcsin}\,2x - \text{Arcsin}\,\sqrt{3}\,x = \text{Arcsin}\,x \quad \dots \quad (*)$$

On a :
$$\Leftrightarrow \sin\left(\text{Arcsin}\,2x - \text{Arcsin}\,\sqrt{3}\,x\right) = x$$

On a : $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

donc $(*) \Leftrightarrow 2x\cos(\text{Arcsin}\,\sqrt{3}.x) - \sqrt{3}.x\cos(\text{Arcsin}\,2x) = x$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2} - \sqrt{3}.x.\sqrt{1-(2x)^2} = x$$

en élevant au carré :
$$2\sqrt{1-3x^2} \ldots \qquad 4\sqrt{3}\sqrt{(1-3x^2)(1-4x^2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4(1-3x^2) + 3(1-4x^2) - 4\sqrt{3}\sqrt{(1-3x^2)(1-4x^2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 6(1-4x^2) = 4\sqrt{3}\sqrt{(1-3x^2)(1-4x^2)}$$

au carré
$$\Leftrightarrow 36(1-4x^2)^2 = 48(1-3x^2)(1-4x^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ x_2 = -\frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

II) Soit $f(t) = \text{Arcsin}\, t$ définie $[0,x] \subset [-1,1]$

- la fonction Arcsin t est dérivable sur $]-1,1[$

de dérivée $(\text{Arcsin}\, t)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

- En vertu du théorème de accroissements finis

de $f(t) = \text{Arcsin}\, t$ sur $[0,x] \subset [-1,1]$

$$\exists c \in]0,x[\; : \; f(x) - f(0) = (x-0) f'(c)$$

$$\text{Arcsin}\, x = x \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

et comme

$$0 < c < x < 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 < c^2 < x^2 < 1 \quad \Rightarrow \sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-c^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x < \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x < \text{Arcsin}\, x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad . \forall x : 0 \cancel{<} x < 1$$