Université Badji Mokhtar- Annaba
Département MI

Examen de rattrapage d'algèbre 1 **2015/2016**

Date: 03 Février 2016 **Time: 10.00-11.30**
(reading time)

Exercice1 (4 pts)

Soit E un ensemble non vide et f une application de E dans E. Démontrer que f est bijective si et seulement si, pour toute partie A de E, $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f\left(A\right)}$.

Exercice2 (5 pts)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)}$

1. f est-elle injective ? Surjective?
2. Montrer que $f\left(\mathbb{R}\right) = [-1,\ 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,\ 1] \to .[-1,\ 1]$ telle que $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice3 (6 pts) Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on définit la loi de composition interne, notée $\diamondsuit$ de la manière suivante:

$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2; \quad \begin{cases} a\diamondsuit b = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \text{ si } (a,b) \neq (0,0) \\ a\diamondsuit b = 0 \text{ si } (a,b) = (0,0) \end{cases}$$

1. Cette loi est-elle commutative ? associative ?
2. Possède-t'elle un élément neutre ?
3. Un nombre réel est-il symétrisable pour cette loi ?
4. $(\mathbb{R}, \diamondsuit)$, est-il un groupe ?

Exercice4 (5 pts)

1. Déterminer le pgcd des polynômes suivants
$$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1,$$
$$X^3 + X^2 - X - 1$$
2. Que peut-on déduire ?

Corrigé rattrapage SI d'algèbre Annaba 2016

Exercice1 (3pts)

1. Démontrons: f bijective $\Rightarrow \forall A \in P(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

a) Démontrons $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$: Soit $y \in f(\overline{A})$, alors, $\exists x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$. Supposons que $y \in f(A)$,alors $\exists x\prime \in A$ $y = f(x\prime)$ donc $f(x) = f(x\prime) \Rightarrow x = x\prime$(car f injective) absurde car $x \in \overline{A}$ et $x\prime \in A$. D'où $y \notin f(A)$ et $y \in \overline{f(A)}$......$(0,75pts)$

b) Démontrons que: $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$: C-à-d, $\forall y \in \overline{f(A)}$ on a $y \notin f(A)$?

Comme f est surjective, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Supposons que $y \in \overline{f(A)}$ alors, $y \notin f(A) \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow y = f(x) \in f(\overline{A})$. on a donc démontrer: f bijective $\Rightarrow \forall A \in P(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.....$(0,75pts)$

2. Démontrons: $\forall A \in P(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \Rightarrow f$ bijective.

1. a) Pour $A = \phi$, $f(\overline{\phi}) = \overline{f(\phi)} \Rightarrow f(E) = \overline{\phi} \Rightarrow f(E) = E$ d'où la surjection de f..... $(0,75pts)$

   b) Soient a et b deux éléments de E tels que $a \neq b$ pour $A = \{a\}$,on a, $b \in \overline{A} \Rightarrow f(b) \in f(\overline{A}) \Rightarrow f(b) \in \overline{f(A)} \Rightarrow f(b) \notin f(A) \Rightarrow f(b) \neq f(a)$
   on a donc démontrer $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ f est donc injective et $f$est bijective d'où l'équivalence....$(0,75pts)$

Exerccie 2 (5pts)

1 a) f n'est pas injective car $2 \neq 1/2$ mais $f(2) = 4 = f(1/2)$... $(1,75pts)$

b) f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : En effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1 + x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$, qui n'a pas de solutions réelles car $\triangle < 0$...$(1,75pts)$

2. L'équation $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\triangle = 4 - 4y^2 > 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1,1]$. Alors, $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1,1]$... $(0,75pts)$.

3 Soit $y \in [-1,1]$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1,1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$, en effet $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$. Donc pour $g : [-1,1] \to [-1,1]$ nous avons trouvé un inverse $h : [-1,1] \to [-1,1]$ défini par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc g est une bijection$(0,75pts)$.

Exercice3 (6pts)

1. **a) Commutativité.** Soit a et b dans $\mathbb{R}$, alors

$$a\diamondsuit b = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} = \frac{b^3+a^3}{b^2+a^2} = b\diamondsuit a, \text{ pour } (a,b) \neq (0,0)$$

et ... $\underline{(1, pt)}$

$$0\diamondsuit 0 = 0, \text{ donc } b\diamondsuit a = b\diamondsuit a \text{ pour } (a,b) = (0,0).$$

La loi est commutative.

b) **Associativité**. Pour -1 et 1 dans $\mathbb{R}$, on a:

$$-1\diamondsuit 1 = \frac{-1+1}{1+1} = 0 \text{ et } 1\diamondsuit 1 = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

donc,

$$(-1)\diamondsuit(1\diamondsuit 1) = (-1)\diamondsuit 1 = 0 \text{ et } ((-1)\diamondsuit 1)\diamondsuit 1 = 0\diamondsuit 1 = 1$$

d'où

$$((-1)\diamondsuit 1)\diamondsuit 1 \neq (-1)\diamondsuit(1\diamondsuit 1).$$

La loi n'est pas associative..... $\underline{(1, 25pts)}$

2. **Elément neutre**. Pour $a = 0$,

$$a\diamondsuit 0 = 0\diamondsuit a = 0 = a.$$

Maintenant, Pour $a \neq 0$,

$$a\diamondsuit 0 = \frac{a^3+0}{a^2+0} = a = 0\diamondsuit a. \text{ ..... } \underline{(1, 25pts)}$$

D'où le 0 est le neutre de la loi $\diamondsuit$.

3. **Symétrique**. Soit b le symétrique de a, alors

$$a\diamondsuit b = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 = 0 \Rightarrow b = -a. \text{ ..... } (\cancel{0, 75}pts) \quad \underline{1,25pts}$$

Tout nombre réel a possède un symétrique pour la loi $\diamondsuit$, qui est son opposé $-a$.

4. **Groupe.** $(\mathbb{R}, \diamondsuit)$ n'est pas un groupe car la loi à n'est pas associative. C'est la seule propriété qui lui manque pour en faire une loi de groupe abélien...... $(\cancel{0, 75}pts)$

$\underline{1,25pts}$

Exercice4 (6pts)

1. Pour calculer le pgcd de deux polynomes on utilise l'algorithme d'Euclid$\begin{cases} R_{n-1} = R_n R Q_n + R_{n+1} \\ R_0 = A, \quad R_1 = B \end{cases}$ ..... (1 pt)

avec

$$\begin{cases} A = X^4 + X^3 - 3X^2 - 1 \\ B = X^3 + X^2 - X - 1 \end{cases}.$$

Alors, pour $n = 1$ on a

$$A = B \times X + \left(\underbrace{-2X^2 - 3X - 1}_{R_2 \neq 0}\right) \text{ ..... } (1pt)$$

Pour $n = 2$, on a

$$X^3 + X^2 - X - 1 = (-2X^2 - 3X - 1) \times \left(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right) + \left(\underbrace{-\frac{3}{4}X - \frac{3}{4}}_{R_3 \neq 0}\right) \text{ ...... } (1pt)$$

Pour $n = 3$, on a

$$-2X^2 - 3X - 1 = \left(-\frac{3}{4}X - \frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{8}{3}X - \frac{4}{3}\right) + \left(\underbrace{0}_{R_4 = 0}\right) \text{ ...... } (1pts)$$

Alors, le pgcd de A et B est le dernier reste non nul, C.à.d

$$p\,\mathrm{gcd}(A, B) = -\frac{3}{4}X - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}(X + 1) \text{ ..... } (1pt)$$

2. On deduit que A et B ne sont pas premiers entre eux..... $(1pt)$