

Examen de mécanique

Exercice 1 (7 points) :

Dans le repère (O,X,Y,Z) de base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les coordonnées des points suivants : A(2,2,-1), B(-3,4,2), C(1,3,2), D(-1, 2,3).

A,B,C sont les sommets d'un triangle et D un point quelconque

1- Trouver les vecteurs : $\vec{V}_1 = \vec{AC} + \vec{BD}$ et $\vec{V}_2 = \vec{AD} - \vec{CD}$

2- Calculer l'angle α

3- Calculer la projection du vecteur $\vec{V}_2$ sur le vecteur $\vec{V}_1$

4- Calculer la surface du triangle (ABC)

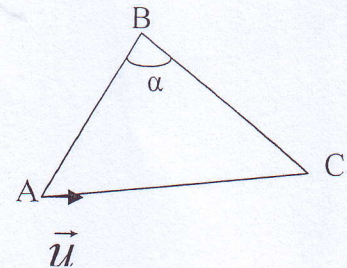
5- Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire du vecteur $\vec{AC}$,
 on définit le double produit vectoriel comme suit :

$$\vec{u} \wedge (\vec{AB} \wedge \vec{u}) = \vec{AB} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u}) - (\vec{AB} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{a} = \vec{u} \wedge (\vec{AB} \wedge \vec{u}) \quad \vec{b} = \vec{AB} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u}) \quad \vec{c} = (\vec{AB} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}$$

Soit :

Que représentent-ils ces 3 vecteurs ? Faites un schéma.



Exercice 2 : (7 points)

On donne les coordonnées cartésiennes d'un mobile M dans le plan XOY :

$$x = 2t \quad , \quad y = t^2 + t$$

- 1- Déterminer l'équation de la trajectoire du point M, quelle est l'allure de cette courbe
- 2- Trouver le vecteur vitesse et le vecteur accélération et déterminer leurs modules.
- 3- Donner en fonction du temps les composantes tangentielle et normale de l'accélération.
- 4- Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

Exercice 3 : (6 points)

Le mouvement d'un point M dans le plan R(O,X,Y) est donné dans le système des coordonnées polaires par les équations : $r = r_0 e^{t/b}$ et $\theta = t/b$, r_0 et b sont des constantes positives.

1- Donner l'équation de la trajectoire

2- Ecrire le vecteur position $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

3- Calculer les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules

4- Déterminer les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

Bonne Réussite

Examen 14 Mars 2019 (solution)

Ex 1

$$1 - \vec{V}_1 = \vec{AC} + \vec{BO}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$\vec{BO} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$\vec{AO} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$\vec{CO} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$\vec{V}_1 = +\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} \quad (0,5)$$

$$\vec{V}_2 = \vec{AO} - \vec{CO} = -5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \quad (0,5)$$



$$\cos \alpha = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CB}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CB}|} \quad (0,5)$$

$$\vec{BA} \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{+10 + 2 + 0}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{17}} = \frac{+12}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{17}} \quad (0,5)$$

$$3 - \text{Proj}_{\vec{V}_1} \vec{V}_2 = \frac{\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1}{|\vec{V}_1|} = \frac{-5 + 1 + 20}{\sqrt{17}} = \frac{16}{\sqrt{17}} \quad (0,5)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{BC}| \quad (0,5)$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \quad (0,5)$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 144 + 9} = \frac{1}{2} \sqrt{162} \quad (0,5)$$

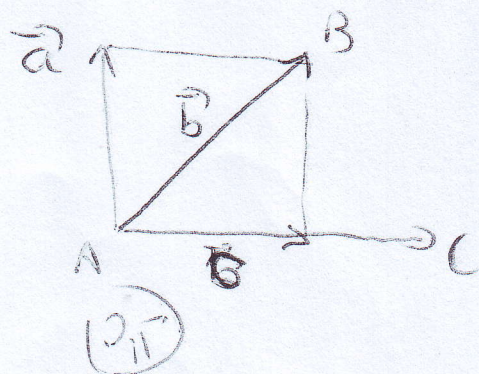
$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$$

$\vec{b}$ = projection of $\vec{AB}$ on $\vec{AC}$

$$\vec{b} = \vec{AB} (\vec{u} \cdot \vec{u}) = \vec{AB} \quad (0,5)$$

$$\vec{c} = (\vec{AB} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = \text{Proj}_{\vec{AC}} \vec{AB} \quad (0,5)$$

$$\vec{b} = \vec{a} - \vec{c} \quad (0,5)$$



Ex 1

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + t \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \quad (1)$$

c'est une parabole.

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = 1 \\ v_y = 2t + 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + (2t+1)^2} = \sqrt{4t^2 + 4t + 2} \quad (3)$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$|\vec{a}| = 2 \quad (5)$$

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{2t+1}{\sqrt{4t^2+4t+2}} = \frac{2t+1}{\sqrt{4t^2+4t+2}} \quad (6)$$

$$a_N = a - a_T^2 = 4 - \frac{(2t+1)^2}{4t^2+4t+2} = \frac{16t^2+16t+8 - 16t^2-16t-4}{4t^2+4t+2}$$

$$a_N = \frac{4}{4t^2+4t+2} \Rightarrow a_N = \frac{2}{2t^2+2t+1} \quad (7)$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{(4t^2+4t+2)^{3/2}}{4} \quad (8)$$

3. 1) $r = r_0 e^{\frac{t}{b}}$ at $\theta = \frac{t}{b} \rightarrow \boxed{r = r_0 e^{\theta}} \quad (0.15)$

$\vec{OR} = r \vec{u}_r = r_0 e^{\frac{t}{b}} \vec{u}_r \quad (0.15)$

$\vec{V} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_{\theta} \quad r = r_0 e^{\frac{t}{b}} \quad \dot{\theta} = \frac{1}{b}$

$\vec{r} = \frac{r_0}{b} e^{\frac{t}{b}} \quad \dot{\theta} = \frac{1}{b}$

$\ddot{r} = \frac{r_0}{b^2} e^{\frac{t}{b}} \quad \ddot{\theta} = 0$

$\vec{V} = \frac{r_0}{b} e^{\frac{t}{b}} \vec{u}_r + \frac{r_0}{b} e^{\frac{t}{b}} \vec{u}_{\theta} = \frac{r_0}{b} e^{\frac{t}{b}} (\vec{u}_r + \vec{u}_{\theta}) \quad (0.15)$

$|\vec{V}| = \frac{r_0}{b} e^{\frac{t}{b}} \sqrt{2} = \frac{r_0 r_0}{b} e^{\frac{t}{b}} \quad (0.15)$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_{\theta} \quad (0.15)$

$\vec{a} = \left(\frac{r_0}{b^2} e^{\frac{t}{b}} - \frac{r_0}{b^2} e^{\frac{t}{b}} \right) \vec{u}_r + \left(2 \cdot \frac{r_0}{b} \cdot \frac{1}{b} e^{\frac{t}{b}} + 0 \right) \vec{u}_{\theta}$

$\vec{a} = \frac{2 r_0}{b^2} e^{\frac{t}{b}} \vec{u}_{\theta} \quad |\vec{a}| = \frac{2 r_0}{b^2} e^{\frac{t}{b}} \quad (0.15)$

4) $a_T = \frac{d|\vec{V}|}{dt} = \frac{\sqrt{2} r_0}{b^2} e^{\frac{t}{b}} \quad (0.15)$

$a_N = a_{\theta} - a_T = \frac{4 r_0}{b^4} e^{\frac{t}{b}} - \frac{2 r_0}{b^4} e^{\frac{t}{b}} = \frac{2 r_0}{b^4} e^{\frac{t}{b}}$

$a_N = \frac{\sqrt{2} r_0}{b^2} e^{\frac{t}{b}} \quad \text{at } f = \frac{v}{a_N} = \frac{\frac{r_0}{b^2} e^{\frac{t}{b}}}{\frac{\sqrt{2} r_0}{b^2} e^{\frac{t}{b}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0.15)$