

(8) pts

Examen d'algèbre I

Exercice 1. I. Soit E un ensemble. Pour $A \in P(E)$, ($P(E)$ désigne l'ensemble des parties de E), on considère l'application

$$\begin{aligned} f_A &: P(E) \rightarrow P(E) \\ B &\rightarrow B \cap A \end{aligned}$$

l'application f_A est-elle injective dans le cas $E \neq A$?

II. Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ deux applications définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2n + 1 \text{ et } g(n) = \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. (a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g .
- (b) Déterminer $g(\{1, 2\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.
- (c) Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
- (d) Etudier l'injectivité, surjectivité et la bijectivité de $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 2. Soit P^* l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation R entre deux éléments de P^* définie par :

$$\forall p, q \in P^*, pRq \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in P^*.$$

La relation R est-elle réflexive, symétrique et transitive ?

Exercice 3. Soit $E = [0, 1]$. On définit une loi $*$ sur E par

$$\forall x, y \in E, x * y = x + y - xy$$

(a) Montrer que,

$$\forall x, y \in E, x * y = 1 - (1 - x)(1 - y).$$

- (b) Dédurre que $*$ est une LCI.
- (c) Montrer que $*$ est commutative et associative
- (d) Montrer que $*$ possède un neutre.
- (e) Déterminer les éléments symétrisables ainsi que les éléments réguliers.

Exercice 4. Déterminer le pgcd D des polynômes suivants

$$\begin{cases} A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 \\ B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6. \end{cases}$$

Trouver des polynômes U et V dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $D = AU + BV$.

Exo 1. L'application $f_A: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$
 $B \mapsto f_A(B) = B \cap A$.

On dit que f_A est injective si

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{P}(E), f_A(B_1) = f_A(B_2) \Rightarrow B_1 = B_2. \quad (0,5 \text{ pts})$$

Dans le cas $E \neq A$, f_A n'est pas injective. Comme contre exemple.

$$\text{Si } B_1 = A \text{ et } B_2 = E \Rightarrow f_A(A) = f_A(E) = A \text{ mais } A \neq E. \quad (1 \text{ pt})$$

$$\text{Soient } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$n \mapsto f(n) = 2n+1 \quad n \mapsto g(n) = \begin{cases} \frac{n+2}{2} & n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. L'injectivité de f (Déf) (0,5 pts)

$$\text{Soient } n_1, n_2 \in \mathbb{N}, f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow 2n_1+1 = 2n_2+1 \Rightarrow n_1 = n_2$$
$$\Rightarrow f \text{ est injective} \quad (0,5 \text{ pts})$$

La surjectivité de f : $\forall m \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}: f(n) = m$. (0,25 pts)

$$f \text{ n'est pas surjective car pour } m=0 \Leftrightarrow 2n+1=0$$
$$\Rightarrow n = -1/2 \notin \mathbb{N}, \text{ donc } \nexists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } f(n) = 0 \quad (0,5 \text{ pts})$$

f n'est bijective car elle n'est pas surjective (0,25 pts)

2. L'injectivité de g (Déf) (0,25 pts)

2. a deux cas

n est pair, alors.

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow \frac{n_1+2}{2} = \frac{n_2+2}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$$

donc g est injective pour n pair (0,25pts)

n est impair,

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, g(n_1) = g(n_2) \Leftrightarrow \frac{n_1+1}{2} = \frac{n_2+1}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$$

donc, g est injective pour n impair. (0,25pts)

~~Mais~~, g n'est ^{pas} injective $\forall n \in \mathbb{N}$, car pour $n=0$ et $n=1$
on a : $g(0) = g(1) = 1$ mais $0 \neq 1$

2. Surjectivité de g (2éf) (0,25pts)

Il suffit de voir que pour $m=0$, il n'existe de $n \in \mathbb{N}$.
 $g(n)=0$, dans les deux cas. (0,5pts)

3. bijectivité de g : g n'est bijective car elle n'est pas
surjective. (0,25pts)

$$1. g(\{1,2\}) = \{g(n), n \in \{1,2\}\} = \{g(1), g(2)\} \\ = \left\{ \frac{1+1}{2}, \frac{2+2}{2} \right\} = \{1, 2\} \quad (0,5pts)$$

$$- f^{-1}(\{0\}) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in \{0\}\} = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = 0\}, \\ = \{n \in \mathbb{N} : 2n+1=0\} = \emptyset \quad (0,5pts)$$

$$1. (g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(\underbrace{2n+1}_{\text{impair}}) = \frac{(2n+1)+1}{2} = n+1$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(n) = n+1. \quad (0,25pts)$$

(2)

pour chercher $f \circ g$, on constate deux cas:

n pair, alors $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f\left(\frac{n+2}{2}\right) = 2\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1$
 $\Rightarrow (f \circ g)(n) = n+3$ (0,25pts)

n impair: $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f\left(\frac{n+1}{2}\right) = 2\left(\frac{n+1}{2}\right) + 1$
 $\Rightarrow (f \circ g)(n) = n+2$ (0,25pts)

'injectivité', la surjectivité et la bijectivité de $g \circ f$

$$(g \circ f)(n) = n+3$$

injective évidente. mais pas surjective car pour $m=1$ l'éq $n+3=1$ n'a pas de sol dans $\mathbb{N}$.
donc, elle n'est pas bijective. (0,75pts)

'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f \circ g$

$$(f \circ g)(n) = n+1 \text{ elle est injective évidente}$$

mais pas surjective pour $m=0$ (0,75pts)
elle n'est pas bijective

Ex 02. La relation R est définie par

$$\forall p, q \in P^*; p R q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in P^*.$$

1) La réflexivité: $\forall p \in P^*; p R p$ (0,25pts)

évidemment $\frac{p+p}{2} = p \in P^*$ donc, elle est réflexive (0,5pts)

(3)

1) La symétrie (Déf) (0,25pts)

Soient $p, q \in P^*$; si $p R q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in P^*$.

et comme $\frac{p+q}{2} = \frac{q+p}{2} \in P^* \Leftrightarrow q R p$.

R est symétrique. (0,5pts)

1) La transitivité Déf (0,25pts)

R n'est pas transitive car si on prend.

$3 \in P^*, 7 \in P^*, 11 \in P^*$, on a:

$$\begin{cases} 7 R 3 \text{ car } \frac{7+3}{2} = 5 \in P^* \\ 3 R 11 \text{ car } \frac{3+11}{2} = 7 \in P^* \end{cases} \text{ mais } 11 \not R 7 \text{ car}$$

$$\frac{11+7}{2} = 9 \notin P^*. \quad (1pt)$$

x03.. Soit $E = [0,1]$, on définit la loi $*$ par

$$\forall x, y \in E, x * y = x + y - xy.$$

1) Montrons que $x * y = 1 - (1-x)(1-y)$ évidente (0,5pts)

2) $*$ est une LCI car: $\begin{cases} x \leq 1 \Rightarrow (1-x) \geq 0 \\ y \leq 1 \Rightarrow (1-y) \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow -(1-x)(1-y) \leq 0 \Rightarrow 1 - (1-x)(1-y) \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - (1-x)(1-y) \in [0,1]. \quad (0,5pts)$$

La loi $*$ est commutative (Déf) (0,25pts)

$$\forall x, y \in E: x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x \quad (0,5pts)$$

(4)

associativité (Def) (0,25pts)

$$n, y, z \in E: (n * y) * z = (n + y - ny) * z$$

$$= n + y - ny + z - (n + y - ny)z$$

$$= n + y + z - (ny + nz + yz) + nyz \rightarrow (*)$$

autre par:

$$n * (y * z) = n * (y + z - yz) = n + (y + z - yz) - n(y + z - yz)$$

$$= n + y + z - (yz + ny + nz) + nyz \rightarrow (**)$$
 (0,5pts)

de (*) et (**), on déduit que la loi est associative.

2 neutre: On remarque que $n * 0 = n + 0 - n \cdot 0 = n$
et comme le neutre est unique, alors le neutre est

$$e = 0 \in [0, 1].$$
 (0,5pts)

Les éléments symétrisables. Def (0,25pts)

$$\text{Soit } n \in E \Rightarrow n * n' = 0 \Leftrightarrow n + n' - nn' = 0$$

$$\Leftrightarrow n - n'(n - 1) = 0 \Rightarrow n' = \frac{n}{n - 1}$$

Donc, tout les éléments de E possèdent un élément symétrique, mais à part l'élément $n = 1$. (0,5pts)

Les éléments réguliers: (Def) (0,25pts)
Soient n et $z \in E$.

$$n * y = z * y \Leftrightarrow n + y - ny = z + y - zy$$

$\Rightarrow n(1 - y) = z(1 - y)$, alors les éléments de E sont réguliers pour $y \neq 1$. (0,5pts) (5)

Exo 4: Pour chercher le pgcd(A,B), avec

$$\begin{cases} A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 \\ B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6 \end{cases}$$

on utilise l'algorithme d'Euclide

$$\begin{cases} R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1} \\ R_0 = A, R_1 = B \end{cases} \quad (0,5 \text{ pts})$$

pour $n=1$, on $R_0 = R_1 Q_1 + R_2$.

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 & X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6 \\ \hline -5X^4 - 2X^3 - 7X^2 - 6X & X + 1 \\ \hline X^4 - 8X^2 - 9X - 2 & \\ X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 7X - 6 & \\ \hline -2X^3 - 10X^2 - 16X - 8 & \\ \hline R_2 \neq 0 & \end{array} \quad (1 \text{ pt})$$

pose $n=2 \Rightarrow R_1 = R_2 Q_2 + R_3$. (0,25 pts)

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6 & -2X^3 - 10X^2 - 16X - 8 \\ \hline X^4 - 5X^3 - 8X^2 - 4X & \\ \hline 3X^3 - 6X^2 + 3X + 6 & -\frac{1}{2}X + \frac{3}{2} \\ 3X^3 + 15X^2 + 24X + 12 & \\ \hline 9X^2 + 27X + 18 & \\ \hline R_3 \neq 0 & \end{array} \quad (1 \text{ pt})$$

6

n. prend $n=2 \Rightarrow R_2 = R_3 \Phi_3 + R_4$. (0,25 pts)

$$2X^3 - 10X^2 - 16X - 8$$

$$\underline{X^3 + 6X^2 + 4X}$$

$$-4X^2 - 12X - 8$$

$$\underline{4X^2 + 12X + 8}$$

$$R_4 = 0$$

$$9X^2 + 27X + 18$$

$$\underline{-\frac{2}{9}X - \frac{4}{9}}$$

(1pt)

$\Rightarrow \text{le pgcd}(A, B) = D = 9(X^2 + 3X + 2)$. (0,5 pts)

cherchons $U, V \in \mathbb{R}[X]$, tels que.

on a: $R_1 - R_2 \Phi_2 = R_3 \Rightarrow R_1 - (R_0 - R_1 \Phi_1) \Phi_2 = R_3$.

$\Rightarrow R_0(-\Phi_2) + R_1(1 + \Phi_1 \Phi_2) = R_3$.

$\Rightarrow \underbrace{A(-\Phi_2)}_U + \underbrace{B(1 + \Phi_1 \Phi_2)}_V = R_3 = D$

$\Rightarrow \begin{cases} U = -\Phi_2 = -(-\frac{1}{2}X + \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}X - \frac{3}{2} & (0,5 \text{ pts}) \\ V = 1 + \Phi_1 \Phi_2 = 1 + (X+1)(-\frac{1}{2}X + \frac{3}{2}) \\ = -\frac{1}{2}X^2 + X + \frac{5}{2} & (0,5 \text{ pts}) \end{cases}$

④