Université Badji Mokhtar Annaba. Fac. des Sciences.
Département De Mathématique et Informatique.
LMD(1ère Année 2015-2016).

Matière : - **ANALYSE 01** - Durée de l'épreuve : **1h30**.

EXERCICE 01 (7 points)
On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{1}{4} < u_n < \frac{3}{4} \text{..............} (\ \mathbf{1\ Pt}).$$

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone...............(**2 Pts**)
c) Est-elle convergente ? si oui, calculer sa limite ....(**1 Pt**) + (**1 Pt**) .
d) Déterminer

$$\inf\{u_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\} \ \ et \ \ \sup\{u_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\} \text{.............} (\ \mathbf{1\ Pt}) + (\ \mathbf{1\ Pt}).$$

EXERCICE 02 (7 points)
I) - Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$.
1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f et démontrer que f est continue et dérivable sur D_f...............(**0,5 Pt + 0,5 Pt + 1 Pt**)
2) Calculer $\overline{\lim_{x\to 0}} f(x)$ et $\underline{\lim_{x\to 0}} f(x)$ ....(**1 Pt + 1 Pt**)

II)Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(x) = xf(x) \quad , si \quad x \neq 0.$$

a) Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$ ....(**1 Pt**)
b) Etudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$. ....(**1 Pt**)
c) Montrer que le graphe de g admet aux points $(x_k, g(x_k))$, $x_k \in]\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}[$, $k \in \mathbb{N}^*$ des tangentes parallèles à l'axe des abscisses OX ....(**1 Pt**)

EXERCICE 03 (6 points)
1) Calculer $\arcsin(\sin \frac{2015\pi}{3})$.............(**1 Pt**).
2) Résoudre l'équation $\arcsin x - 2\arctan x = 0$ ....(**2 Pts**)
3) Montrer que :

$$-x \leq \arcsin x - 2\arctan x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{1+x^2} \quad si \quad 0 \leq x < 1 \text{......} (\ \mathbf{2\ Pts})$$

4) Et déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - 2\arctan x}{x} \text{..............} (\ \mathbf{1\ Pt})$$

EX1 : on a $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$

(u_n) est une suite de termes positifs car

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16} > \frac{3}{16} > 0$

a) Montrons par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{4} < u_n < \frac{3}{4}$

- pour $n = 0$ $\frac{1}{4} < u_0 = \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ est vraie
- Supposons que la relation reste vraie à l'ordre (n).

Verifions alors pour l'ordre $(n+1)$

$\frac{1}{4} < u_n < \frac{3}{4}$ est vraie $\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16} < u_n^2 + \frac{3}{16} < \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} < u_{n+1} < \frac{3}{4}$

b) Montrons que (u_n) est monotone :

$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{3}{16} - u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \left(u_n - \frac{1}{4}\right)\left(u_n - \frac{3}{4}\right) < 0$

d'aprés (a). alors (u_n) est strictement décroissante.

c) D'aprés a) et b) on obtien : $\begin{cases} (u_n) \text{ est majorée par } \frac{1}{4} \\ \text{et} \\ (u_n) \searrow \text{ est st. déc.} \end{cases}$

$\Rightarrow (u_n)$ est CV.

d) • La suite (u_n) est décroissante :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} < u_n < u_{n-1} < \cdots < u_1 < u_0 = \frac{1}{2}$

alors (u_n) est majorée par $u_0 = \frac{1}{2}$.

Donc $u_0 = \frac{1}{2}$ est le plus grand élément de (u_n)

d'où $u_0 = \frac{1}{2} = \mathrm{Max}\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

• La suite (u_n) est CV alors sa limite l vérifie

$\lim\limits_{+\infty} u_n = l = \lim\limits_{+\infty} u_{n+1} \Leftrightarrow l = l^2 + \frac{3}{16} \Leftrightarrow \left(l - \frac{1}{4}\right)\left(l - \frac{3}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow l = \frac{1}{4}$ ou $l = \frac{3}{4}$

Comme $\forall n$: $u_n \leq u_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l < \frac{1}{2} \Rightarrow l = \frac{1}{4}$

et comme (u_n) est décroissante et minorée donc

$l = \frac{1}{4} = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

EX. 2

I) On a : $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$

- 1) La fonction f est la composée des fonctions

$$: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{\pi}{x} \qquad\qquad x \longrightarrow \sin x$$

il en résulte que f est définie, continue et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}^*$ et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x}$$

- 2) Calculons $\overline{\lim_{x\to 0}} f(x)$ et $\underline{\lim_{x\to 0}} f(x)$:

Comme $-1 \leq \sin \frac{\pi}{x} \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \quad -1 \leq \sin \frac{\pi}{X_n} \leq 1$, $\forall X_n \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \quad -1 \leq \lim_{X_n \to 0} \sin \frac{\pi}{X_n} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad ad(0) = [-1, 1]$

- Soit $X'_n = \dfrac{\pi}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \geq 1$ on a : $X'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

alors $\lim_{X'_n \to 0} \sin \frac{\pi}{X'_n} = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = +1 = \sup [-1, 1]$

$\Rightarrow \quad \overline{\lim_{x\to 0}} \sin \frac{\pi}{x} = 1$

- Soit $X''_n = \dfrac{\pi}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \geq 1$ on a : $X''_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

alors $\lim_{X''_n \to 0} \sin \frac{\pi}{X''_n} = \lim \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1 = \inf [-1, 1]$

$\Rightarrow \quad \underline{\lim_{x\to 0}} \sin \frac{\pi}{x} = -1$

II) Soit $g(x) = \begin{cases} x f(x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

a) On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $g(x) = x f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$

la fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}^*$

puis que x est cont. sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ cont. sur $\mathbb{R}^*$

et $\sin \frac{\pi}{x}$ est cont. sur $\mathbb{R}^*$.

EX. 3 :

1) Calculons $\arcsin\left(\sin \frac{2015}{3}\pi\right)$

comme $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

il faut déterminer le réel $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

tel que $\sin x = \sin \frac{2015\pi}{3}$. Mais

$$\sin\left(\frac{2015\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{(2 \cdot 3 \cdot 336 - 1)\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad (\sin \text{ est periodique de période } 2\pi)$$

donc $\sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{x = \frac{-\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ sin injectif sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow \arcsin\left(\sin \frac{2015\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

2) pour tout $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, comme $1 + tg^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$

il vient $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 y}}$. Donc

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{car } y = \operatorname{arctg} x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

et comme $\sin y = \cos y \, tg\, y$. on a aussi

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \cos(\operatorname{arctg} x)\, tg(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

on a alors : $\arcsin x = 2 \operatorname{arctg} x$

$$\Rightarrow x = \sin(2 \operatorname{arctg} x)$$

$$= 2 \sin(\operatorname{arctg} x) \cos(\operatorname{arctg} x)$$

$$= 2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow x^3 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 0}, \boxed{x_1 = 1} \text{ ou } \boxed{x_2 = -1}$$

• Etudions la continuité de g au point $x_0 = 0$

pour tout réel non nul x, on a :

$$|g(x)| = |x f(x)| = \left|x \sin \frac{\pi}{x}\right| \leq |x|$$

il en résulte $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$

$\Rightarrow$ g est continue en 0.

- En résumé, g est continue sur $\mathbb{R}$.

b). • $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $g(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

puisque $\left.\begin{array}{l} x \text{ est dér. sur } \mathbb{R} \Rightarrow \text{ sur } \mathbb{R}^* \\ \text{et } \sin\frac{\pi}{x} \text{ est dér. sur } \mathbb{R}^* \end{array}\right\} \Rightarrow x \sin \frac{\pi}{x}$ est dér. sur $\mathbb{R}^*$.

• Etudions la dérivabilité de g au point $x_0 = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{\pi}{x}$ $\nexists$ d'aprés (I-2)

$\overline{\lim\limits_{0}} \sin \frac{\pi}{x} \neq \underline{\lim\limits_{0}} \sin \frac{\pi}{x}$

- En résumé, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

c) On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $\left[\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right] \subset \mathbb{R}^*$ et d'aprés

a) et b) On a :

• g est continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ cont. sur $\left[\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right]$

• g est dérivable sur $\mathbb{R}^* \Rightarrow$ dérivable sur $\left]\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right[$

• $g\left(\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\pi = 0 = g\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k} \sin 2k\pi$.

donc d'aprés le théorème de Rolle :

$$\exists x_k \in \left]\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right[\ : \ g'(x_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Alors le graphe de g admet aux point $(x_k, g(x_k))$ des tangentes parallèles à l'axe des abscisses OX.

3) Soit $f(t) = \arcsin t - 2\operatorname{arctg} t$

$D_f = [-1,1]$ et On va appliquer le T.A.F

sur $[0,x]$: $0 < x < 1$

on a :

- $f(t)$ est définie, continue sur $[0,x] \subset [-1,1]$
- $f(t)$ est dérivable sur $]0,x[\subset]-1,1[$.

Alors $\exists c$: $0 < c < x$:

$$f(x) - f(0) = x f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad \arcsin x - 2\operatorname{arctg} x = x\left(\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} - \frac{2}{1+c^2}\right)$$

et comme : $0 < c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2 \Rightarrow \cdots$

$$\Rightarrow \quad -1 < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} - \frac{2}{1+c^2} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2}$$

$0 < x < 1$

$$\Rightarrow \quad -x < \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} - \frac{2x}{1+c^2} < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{1+x^2}$$

$0 < x < 1$

$$\Rightarrow \quad -x < \arcsin x - 2\operatorname{arctg} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{1+x^2}$$

de plus on remarque que l'inégalité est vérifiée pour $x = 0$

On conclue que $\forall x : 0 \leq x < 1$

$$-x \leq \arcsin x - 2\operatorname{arctg} x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{1+x^2}$$

4) passage à la limite dans

$$-1 \leq \frac{\arcsin x - 2\operatorname{arctg} x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2} \rightarrow -$$

quand $x \rightarrow 0$

on obtient $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = -1$