Analyse I
2012/2013

Université Badji Mokhtar Annaba
Département MIAS
Matière: Analyse I
Année: 2012-22013

Examen Semestriel d/Analyse I

Documents non autorisées

Durée: 01h30

Exercice 1 (02 points)

Trouver le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure s'ils existent de l'ensemble A défini par $A = \left\{ \frac{x^2}{2} + 1, x \in [0,2] \right\}$.

Exercice 2 (04 points)

Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x + 4}{x + 1}$. Puis la vérifier par la définition.

2) $\lim\limits_{x \to -0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 3 (04 points)

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$$

Etudier la convergence de la suite (U_n).

Exercice 4 (02 points)

Calculer par la définition la dérivée de la fonction $\log_a x$, a étant un nombre positif différent de 1.

Exercice 5 (04 points)

Déterminer les réels a et b de façon à ce que la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} a\frac{\sin x}{x} + 2b, & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -ae^x + b(x+1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit continue sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (04 points)

1) Soit f une fonction telle que $f \in C[a,b]$ et $f([a,b]) \subset [a,b]$ avec a, b des nombres réels. Montrer en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g(x) = f(x) - x$ sur l'intervalle $[a,b]$ qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = c$.

2) Si a et b sont deux nombres réels tels que $a, b \in]-1,+1[$.
Montrer que

$$0 < \arcsin a - \arcsin b < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}.$$

BONNE CHANCE.

Corrigé de l'examen Semestriel d'Analyse I

Exercice I (02 pts)

On considère la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ sur $[0,2]$.
f en tant que fonction élémentaire est continue sur l'intervalle fermé $[0,2]$ $\Rightarrow$ f est bornée et atteint ses bornes $\Rightarrow$ $\min_{[a,b]} f(x)$ et $\max_{[a,b]} f(x)$ existent. 01pt

De plus, $f'(x) = x \geq 0$ sur $[0,2]$ $\Rightarrow$ f est croissante.
On peut donc écrire que :

$$\min_{[0,2]} f(x) = f(0) = 1 = \inf A$$ 00,75pt

$$\max_{[0,2]} f(x) = f(2) = 3 = \sup A$$

les nombres 1 et 3 appartiennent à A donc

$\min A = \inf A = 1$ 00,25pt

$\max A = \sup A = 3$

Exercice 2 (04 points)

1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x + 4}{x+1} = \frac{0}{0}$ (ind)

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x + 4}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 4)}{\cancel{(x+1)}} =$$ 01pt

$$= \lim_{x \to -1} x^2 - x + 4 = 6$$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+3x+4}{x+1} = 6 \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 : \forall x$ si

$|x+1| < \eta \Rightarrow \left| \dfrac{x^3+3x+4}{x+1} - 6 \right| < \varepsilon$

$\left| \dfrac{x^3+3x+4}{x+1} - 6 \right| = \left| \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2+4-x)}{\cancel{x+1}} - 6 \right| =$

$= |(x^2-x+4-6)| = |x^2-x-2| = |x+1||x-2|$

En choisissant $\eta_1 = 1$ on a $|x+1| < 1 \Rightarrow -2 < x < 0$

$\Rightarrow |x+1||x-2| < |x+1|(|x|+|-2|) < |x+1|(0+2)$

$= 2|x+1| < \varepsilon \Rightarrow |x+1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. posons $\eta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$

En choisissant $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$ on a 01pt

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+3x+4}{x+1} = 6$$

2) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = (1)^{\infty}$ ind

dans ce cas on applique le th suivant:

$\left.\begin{array}{l} U_n(x) = \cos x \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \\ V_n(x) = \dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} (U_n(x))^{V_n(x)} = e^{\lambda}$ 00,50pt

où $\lambda = \lim\limits_{x \to 0} (U_n(x) - 1) \cdot V_n(x)$

dans notre cas:

$\lambda = \lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1) \times \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} -2 \dfrac{\sin^2 x/2}{x^2} =$ 01pt

$= \lim\limits_{x \to 0} -2 \dfrac{\sin x/2}{2 \cdot \frac{x}{2}} \cdot \dfrac{\sin x/2}{2 \cdot \frac{x}{2}} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 00,50pt

Exercice 3 (04 points)

1) soit $f(x) = \sqrt{x+2}$ la fonction associée à (U_n)

$\mathcal{D}_f = [-2, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$, $x \in]-2, +\infty[$. 01pt

$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ U_2 - U_1 = \sqrt{3} - 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (U_n)$ est croissante 00,50pt

2) Si (U_n) converge, notons par ℓ sa limite qui doit vérifier $\ell = f(\ell)$ on a alors

$\ell = \sqrt{\ell + 2} \Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ell_1 = 2 \\ \ell_2 = -1 \end{cases}$ 00,50pt

comme $U_n > 0$ $\forall n$ donc $\ell_2 = -1$ ne convient pas

donc $\ell = 2$ serait la limite de (U_n). 00,50pt

Montrons alors que $\forall n$, $U_n \leq 2$.

On procède par récurrence :

$U_0 = 1 < 2$ 01pt

On suppose que $U_n \leq 2$

Montrons que $U_{n+1} \leq 2$

Comme $U_n \leq 2 \Rightarrow U_n + 2 \leq 2 + 2 \Rightarrow$

$\sqrt{U_n + 2} \leq \sqrt{4} \Rightarrow U_{n+1} \leq 2$

(U_n) est une suite croissante majorée par 2,

donc (U_n) est convergente vers 2. 00,50pt

Exercice 4 (02 pts)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \text{ lind.}$$ 00,50pt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$ 00,50pt

On remarque que:

quand $\Delta x \to 0 \Rightarrow \frac{x}{\Delta x} \to +\infty \overset{th}{\Rightarrow} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = e$ 01pt

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Exercice 5 (04 pts)

si $x \neq 0$.

f est une fonction composée de fonctions élémentaires continue donc elle est continue 00,50pt

si $x = 0$

Il faut étudier la continuité à gauche de 0 et à droite de 0.

00,50pt + 00,50pt

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a\frac{\sin x}{x} + 2b = a + 2b = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -ae^x + b(x+1)^2 = -a + b = f(0) = 1$$

00,50pt + 00,50pt

pour que f soit continue en 0, il faut et il suffit que f soit continue à droite de 0 et à gauche de 0. ceci nous donne :

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \end{cases}$$ 01pt

Si $a=-\frac{1}{3}$ et $b=\frac{2}{3}$ alors f est continue en 0 et par conséquent elle sera continue sur $\mathbb{R}$. 00,50pt

Exercice 6 (04 pts)

1) On considère la fonction $g(x)=f(x)-x$ sur $[a,b]$.

"g" est continue sur $[a,b]$ car f est continue sur $[a,b]$ et la fonction "x" est continue sur $[a,b]$. 00,50pt

On a $f([a,b]) \subset [a,b] \Rightarrow \begin{cases} a \leq f(a) \leq b \\ a \leq f(b) \leq b \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(a)-a \geq 0 \\ f(b)-b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(a) \geq 0 \\ g(b) \leq 0 \end{cases}$$ 00,50pt

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ continue sur } [a,b] \\ g(a)\cdot g(b) \leq 0 \end{array}\right\} \underset{V.I}{\overset{th}{\Longrightarrow}} \exists c \in]a,b[: g(c)=0$$ 01pt

$$\Rightarrow f(c)-c=0 \Rightarrow f(c)=c.$$

(b) Soit $f(x) = \text{Arcsin}\,x$ sur $[a,b]$;
$a, b \in]-1,+1[$.

(*) $a < b$ et $\text{Arcsin}\,x$ est croissante en tant qu'inverse de la fonction $\sin x$ sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$. donc

$$a < b \Rightarrow \text{Arcsin}\,a < \text{Arcsin}\,b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \text{Arcsin}\,b - \text{Arcsin}\,a$$

01pt

(*) On applique le th. des A.F à $f(x) = \text{Arcsin}\,x$ sur $[a,b]$.

$$\Rightarrow \exists c \in]a,b[: \text{Arcsin}\,b - \text{Arcsin}\,a = (\text{Arcsin}\,x)'_{x=c}(b-a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}(b-a)$$

mais $c < b \Rightarrow c^2 < b^2 \Rightarrow -c^2 > -b^2$

$$\Rightarrow 1 - c^2 > 1 - b^2 \Rightarrow \sqrt{1-c^2} > \sqrt{1-b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

01pt

$$\Rightarrow \text{Arcsin}\,b - \text{Arcsin}\,a < \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}.$$