Module : Analyse 01 : 2013-2014
$1^{\text{ième}}$ Année Maths et Informatique

Examen semestriel
Durée : 1h30

Exercice 1 : (4 points)

a) Soient T et S sous ensembles de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $T = \{y = 1/x : x \in S\}$.
Montrer que si S est borné alors T est borné.
b) Déterminer $\sup E$; $\inf E$ pour
$E = \{x \in \mathbb{R}_+^* : x = \arcsin 0\}$;
$E = \{y = [x] : -2 < x < 2\}$ où $[.]$ est la partie entière.

Exercice 2 : (6 points)

a) Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites dans $\mathbb{R}$ telles que $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;
$v_n = u_n + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
b) Etudier la nature des suites de termes généraux suivants :
$u_n = \left(\frac{1}{n!}\right)^n$; $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$; $n \geq 0$ avec $u_0 = 2$. .

Exercice 3 : (5 points)

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.
b) Déterminer $f([0, +\infty[)$ puis déduire $\sup f$ et $\inf f$ sur $[0, +\infty[$ pour $f(x) = 1 + e^{-x}$.
f admet-elle une réciproque?
c) Déterminer $\tilde{f}$ le prolongement continu de $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ à $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : (5 points)

a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$.
b) Calculer la dérivée n'ième de: $(ax + b)e^x$.
c) Calculer par la régle de L'Hôpital $\lim\limits_{x\to 1} \frac{Arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \coth x$.

Exercice 5 : (3 points)

a) Que signifient $f'_+(a) = f'_-(a) = l \in \mathbb{R}$ et $f'(a^+) = f'(a^-) = l \in \mathbb{R}$ pour $a \in D_f$?
b) Si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$; la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge ou diverge?
c) $f : D_f \to \mathrm{Im}_f$ et $g : D_g \to \mathrm{Im}_g$; dans quel cas fog est possible?

BONNE CHANCE !

Corrigé de l'examen 1 — 1

Exo 1 : /4

1) T et $S \subset \mathbb{R}_+^*$; $\forall y \in T\ \exists x \in S : y = \frac{1}{x}$ 0,25

S est borné $\Rightarrow \exists m$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$: $m \leq x \leq M$ 0,25

$\Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{M}$ et $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}$ 0,25 $\Rightarrow \frac{1}{M} \leq y \leq \frac{1}{m}$, $\forall y \in T$ 0,25

$\Rightarrow T$ est borné 0,25

2) * $E = \{x \in \mathbb{R}_+^* : x = \arcsin 0\}$; on a $\sin x = \sin \arcsin 0 = 0$ 0,25

$\Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 0,25
comme $x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow x > 0$ 0,25
$\Rightarrow x = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ 0,25

$\Rightarrow E = \{\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\}$ 0,25

Alors $\inf E = \pi$ 0,25 et E n'est pas borné sup. donc pas de sup.
ou $\sup E = +\infty$. 0,25

* $E = \{y = [x] : -2 < x < 2\}$

on a : $x : -2 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$ 0,25

$[x] :\quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1$

$\Rightarrow E = \{-2, -1, 0, 2\}$ 0,25 $\Rightarrow \sup E = 1$ 0,25, $\inf E = -2$. 0,25

Exo 2 : /6

1) $u_{n+1} - u_n = \left[1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right] - \left[1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{(n+1)^2}$ 0,25 $> 0 \Rightarrow (u_n)_{n\geq 1} \nearrow$. 0,25

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ 0,25

$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 1 - 2n}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0, n \geq 1$ 0,25

$\Rightarrow (v_n)_{n\geq 1}$ est $\searrow$ 0,25

et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ 0,5. Alors $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

$\ast$ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0^{-\infty}$ (F.I) sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$ 0,25

0,25

$= \lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(\frac{1}{n!}\right)}$ 0,25 $= e^{\infty(-\infty)} = 0$ 0,25 $\Rightarrow (U_n)_{n\geq 1}$ cge 0,25

$\ast$ $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{1+U_n^2}{2} \\ U_0 = 2 \end{cases}$; on pose $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$, $x > 0$ 0,25

suite récurrente 0,25 $f'(x) = \dfrac{2x}{2} = x > 0$ pour $x > 0$

$\Rightarrow f$ est $\nearrow$ pour $x > 0$ 0,25 $\Rightarrow (U_n)_{n\geq 0}$ est monotone 0,25

On calcule alors $U_1 - U_0 = \dfrac{1+4}{2} - 2 = \dfrac{1}{2} > 0$ 0,25 $\Rightarrow (U_n)_{n\geq 0}$ est $\nearrow$ 0,25

f est continue et strict. monotone donc, admet un point fixe l 0,25

$f(l) = l \Rightarrow \dfrac{l^2+1}{2} = l \Rightarrow l^2+1-2l = (l-1)^2 = 0 \Rightarrow l = 1$ 0,25

0,25

$(U_n)_{n\geq 1}$ est $\nearrow$ et $U_0 = 2 > l = 1$ 0,25

$\Rightarrow (U_n)_{n\geq 1}$ est croissante non majorée 0,25 $\Rightarrow (U_n)_{n\geq 1}$ divge 0,25 et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Exo3: /5

) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \iff \forall A > 0 \ \exists B > 0 : \forall x < -B \Rightarrow x^2 > A$ 0,5

on a $x^2 > A \Rightarrow x > \sqrt{A}$ ou $x < -\sqrt{A}$ 0,25

alors $\exists B = +\sqrt{A} > 0$

0,25

$\ldots = 1 + e^{-x}$; pour déterminer $f([0,+\infty[)$ on doit connaître la monotonie de f.

$\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty[: x_1 < x_2 \Rightarrow -x_2 < -x_1 \Rightarrow e^{-x_1} + 1 > e^{-x_2} + \ldots$ 0,5

$\Rightarrow f$ est $\searrow$ sur $[0,+\infty[$ (ou par la dérivée). 0,25

$$\Rightarrow f([0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x) ; f(0)\right] = \left]\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x}), 1+e^{-0}\right]$$ 0,5

$$=]1, 2]$$ 0,25

Alors $\sup_{x\in[0,+\infty[} f(x) = 2$ 0,25 ; $\inf_{x\in[0,+\infty[} f(x) = 1$. 0,25

f est continue et strict. monotone $\Rightarrow f$ admet une réciproque sur $[0,+\infty[$ 0,5

2) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$; $D_f = \mathbb{R}/\{-2\}$ 0,25

f est continue sur D_f car c'est le quotient de deux polynômes. 0,25

on a : $\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} \dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = -4$ 0,5

Alors $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & ; x \neq -2 \\ -4 & ; x = -2 \end{cases} = x-2 \quad , x \in \mathbb{R}.$ 0,5

Exo4 1/5

1) l'éq d'une tgte en x_0 est : $y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ 0,50

on a : $x_0 = 0$ et $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ et $e^{x_0} = e^0 = 1$ 0,25

$\Rightarrow$ l'éq de la tgte à e^x en $x_0 = 0$ est :

$$y = e^0 + e^0 x = 1 + x$$ 0,25

1)(*) $\left[(ax+b)e^x\right]^{(n)} = \left[f(x)\cdot g(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$

0,25 0,25

On choisit : $g(x) = ax+b \rightarrow g'(x) = a \rightarrow g''(x) = 0$ 0,25

alors k s'arrête en 1.

$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \geq 0$ 0,25

D'où $(*) = C_n^0 \, (e^x)^{(n)} (ax+b) + C_n^1 \, (e^x)^{(n-1)} . a$ 0,25

$= \frac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{n!}} e^x (ax+b) + \frac{n!}{(n-1)!\,1!} e^x . a$

$= e^x (ax+b) + n . e^x . a = e^x\left[ax+b+n.a\right].$

0,25

2)* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\text{Arccos}\,x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{0}$ (F.I) 0,25

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{(\text{Arccos}\,x)'}{(\sqrt{1-x^2})'} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{-1/\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{-2x/2\cancel{\sqrt{1-x^2}}} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{+1}{x} = +1$

0,25 0,5 0,25

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \coth x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{ch}\,x}{\text{sh}\,x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x + e^{-x})/\cancel{2}}{(e^x - e^{-x})/\cancel{2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}+1)}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}-1)}$

0,25 0,25

$= \frac{+\infty}{+\infty}$ (F.I)

0,25

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}-1)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{e^{2x}}}{2\cancel{e^{2x}}} = 1.$

0,25 0,25

Exos : /3

1) $f'_-(a) = f'_+(a) = l \in \mathbb{R}$, $a \in D_f$

la dérivée à gauche de f en a est égale à la dérivée à droite en a 0,25

c-à-d f est dérivable en a 0,25

$f'(a^+) = f'(a^-) = l \in \mathbb{R}$; $a \in D_f$

la limite à droite de a de la dérivée de f est égale à la limite

à gauche de a " " " ... 0,25

c-à-d f' est continue en a 0,25

) si $\overline{\lim_{n \to +\infty}} u_n = \underline{\lim} u_n = l \in \mathbb{R}$ 0,25 $\Rightarrow (u_n)_{n\geq 0}$ cge vers l 0,25

si $\overline{\lim_{n \to +\infty}} u_n = \underline{\lim} u_n = +\infty$ ou $-\infty$ 0,25 $\Rightarrow (u_n)_{n\geq 0}$ dvge 0,25

) $f : D_f \longrightarrow Im f$; $g : D_g \longrightarrow Im g$

$f \circ g(x) = f(g(x))$ est possible pour $x \in D_g$

c-à-d $g(x) \in Im g$ 0,25 et $g(x) \in D_f$ 0,25

$\Rightarrow g(x) \in Im g \cap D_f$

la condition est alors : $Im g \cap D_f \neq \emptyset$ 0,5