Module : Analyse 1 : 2014-2015
1ième Année Maths et Informatique

Examen semestriel
Durée : 1h30

Exercice 1 : (6 points)

a) Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ et majoré, $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A.
Montrer que si $\exists (a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R} : \lim\limits_{n \to \infty} a_n = M; x \in E$ alors $M = \sup A$.

b) Déterminer sup et inf des sous ensembles de $\mathbb{R}$:

$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x = \arccos(\cos 2x)\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} : x = ((-1)^n + 1)\, n, n \geq 0\}$.

c) Montrer que: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\max(a,b) - \min(a,b) = |a-b|$.

Exercice 2 : (5 points)

a) Etudier la nature des suites de termes généraux suivants :

$u_n = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{n}\right), n \geq 1; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3u_n}, n \geq 0, u_0 = 1.$

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2^n}{(2n)!} = 0.$

Exercice 3 : (4 points)

a) Déterminer le domaine de définition de : $f(x) = \sqrt{x}^{x^2}$; $f(x) = \frac{E(x)}{E(2x)}$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x = +\infty$.

c) Montrer que : $f(x) = o_{x_0}(g(x)) \Rightarrow f(x) + g(x) \approx_{x_0} g(x)$.

d) Montrer que la droite $y = ax + b$ est tangente à $f(x) = x^2$ ssi $a^2 + 4b = 0$.

Exercice 4 : (6 points)

a) f est-elle de classe C^1 sur son domaine de définition?

$$f(x) = \begin{cases} ch\sqrt{x}; & x > 0 \\ 1; & x = 0. \end{cases}$$

$ch\sqrt{x}$ est-elle de classe C^1 sur son domaine de définition ?

b) Montrer que $\arg\tanh x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}; x \in]-1, 1[$.

c) Montrer que: $(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh nx + \cosh nx; n \in \mathbb{Z}$.

Exercice supplémentaire: (3 points)

a) Si $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\ u_n = l_1 \neq l_2 = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\ u_n$ ceci implique quoi ?

b) Ecrire la définition de $f(x)$ est discontinue en x_0.

c) Pour quel $x > 0$ a-t-on $x^{(x^x)} = (x^x)^x$?

BONNE CHANCE !

Corrigé de l'examen :

Exo 1 : / 5

a) M majorant de A $\Rightarrow$ $\forall n \geq 0$ $a_n \leq M$ car $(a_n) \subset A$ (0,25)

$\lim_{n \to +\infty} a_n = M \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \geq 0 \quad \forall n \geq k \Rightarrow |a_n - M| < \varepsilon$ (0,25)

$\Rightarrow M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon$ (0,25)

Alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a_n \in A$ (0,25), $n \geq k$: $M - \varepsilon < a_n \leq M$ (0,25) $\Rightarrow M = \sup A$

b) on sait que $\arccos(\cos y) = y$ si $y \in [0, \pi]$ (0,25)

$\Rightarrow$ $2x \in [0, \pi]$ (0,25) $\Rightarrow$ $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (0,25)

$\Rightarrow \sup A = \frac{\pi}{2}$ (0,25) et $\inf A = 0$ (0,25)

$B = \{ ((-1)^n + 1)n, n \geq 0 \} = \{0, 0, 4, 0, 8, 0 \ldots \}$ (0,25)

on a alors : $x = u_n = \begin{cases} 0 & ; n = 2k+1 \text{ impair} \\ 4k & ; n = 2k \text{ pair} \end{cases}$ (0,25)

$\Rightarrow \lim_{n} u_n = \begin{cases} 0 & ; n \text{ impair} \\ +\infty & ; n \text{ pair} \end{cases}$ (0,25) $= (\underline{\lim}\, u_n)$ $= (\overline{\lim}\, u_n)$

Alors $\inf B = 0$ (0,25) $= (\min(\underline{\lim}\, u_n, \min u_n))$

$\sup B = +\infty$ donc B non majorée $(= \overline{\lim}\, u_n)$

$\sup B \nexists$ (0,25)

c) $\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a > b \\ b & \text{si } a < b \end{cases}$ (0,25) et $\min(a,b) = \begin{cases} b & ; a > b \\ a & ; a < b \end{cases}$ (0,25)

$\Rightarrow \max(a,b) - \min(a,b) = \begin{cases} a - b & \text{si } a > b \Rightarrow a - b > 0 \\ b - a = -(a-b) & \text{si } a < b \Rightarrow a - b < 0 \end{cases}$ (0,25) (0,25)

$= |a - b|$ (0,25)

Exo / 5

a) * $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et arcsin est continue sur $[-1,1]$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \arcsin \frac{1}{n} = \arcsin(\lim \frac{1}{n})$ 0,25 $= \arcsin 0 = 0$ 0,25

et $\lim (-1)^n = \begin{cases} -1 & ; n \text{ impair} \\ 1 & ; n \text{ pair} \end{cases}$ 0,25 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n} = \pm 0 = 0$ 0,25

$\Rightarrow (u_n)$, cge vers 0 0,25

* $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3u_n} & ; n \geq 0 \\ u_0 = 1 \end{cases}$ suite récurrente on définit alors :

$f(x) = \frac{1}{3x}$, $x > 0$ 0,25

f continue de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 0,25 et $f'(x) = \frac{-1}{3x^2} < 0$ $\Rightarrow f$ est $\searrow$ 0,25 $\Rightarrow$

$\Rightarrow u_2 - u_0 = f(u_1) - u_0 = 0$ 0,25 pour $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{3}$

$u_3 - u_1 = f(u_2) - u_1 = 0$ 0,25

$\Rightarrow (u_{2n})_{n\geq 0}$ est cste et cge vers 1

$(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ " " " vers $\frac{1}{3}$ 0,25

$1 \neq 1/3$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim u_{2n+1}$ 0,25

$\Rightarrow (u_n)_{n\geq 0}$ dige 0,25

Rq : Le pt fixe $\exists\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ car on a $f(I) \cap I \neq \emptyset$ suffit pour la stabilité d'un intervalle dans I.

(b) on a : $u_n = \frac{2^n}{(2n)!} = \frac{2}{2n} \cdot \frac{2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$ 0,25 ; $\frac{2}{k} < 1$

pour $k = n+1, \dots 2n$ et aussi $2^n \geq 1$.

$\Rightarrow \frac{1}{(2n)!} \leq u_n \leq (1)^n \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}$ 0,25 0,25 ; $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$ 0,25

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n)!} = 0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$ 0,25 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ 0,25

Ex03 : /4

1) $f(x) = \sqrt{x}^{\,x}$, pour $\sqrt{x}$ on a $x \geq 0$ et 0^0 F.I $\Rightarrow D_f =]0, +\infty[$

0,25 0,25

$f(x) = \dfrac{E(x)}{E(2x)}$, on a $E(2x) = 0$ si $2x \in [0, 1[$ $\Rightarrow x \in [0, \frac{1}{2}[$

0,25 $\Rightarrow D_f =]-\infty, 0[\cup [\frac{1}{2}, +\infty[$

0,25

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0 \ \exists ? B > 0 : \forall x > B \Rightarrow f(x) > A$ 0,25

$x^2 + x > A$

$\Rightarrow x^2 + x - A > 0$ 0,25 et $\Delta = 1 + 4A > 0$ car $A > 0$

d'où $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{\Delta}}{2} < 0$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2} > 0$ car A très grand

0,25

$\Rightarrow \exists B > \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4A}}{2}$: la définition est vérifiée

0,25

c) $f(x) = o_{x_0}(g(x)) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) + g(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} + 1\right] = 1$

f négligeable ~~devant~~ au voisinage de x_0 0,25 0,25 0,25

$\Rightarrow f(x) + g(x) \underset{x_0}{\approx} g(x)$ 0,25

f + g est équivalente à g au voisinage

d) la droite $y = ax + b$ est tangente à la parabole $f(x) = x^2$ c-à-d

l'∩ entre la droite et la courbe a lieu en un seul point x_0

0,25

$\Rightarrow a x_0 + b = x_0^2 \Rightarrow x_0^2 - a x_0 - b = 0$

0,25 0,25

alors $\Delta = a^2 + 4b = 0$ car x_0 solution unique

0,25

Exo4 : /6 (a) $f(x) = \begin{cases} ch\sqrt{x} & ; x>0 \\ 1 & ; x=0 \end{cases}$

f est continue et dérivable pour $x>0$ car c'est la composition de deux fcts " " " : $ch\,x$ et $\sqrt{x}$. 0,25

pour $x_0=0$ on a $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} ch\sqrt{x} = ch\,0 = 1 = f(0) \Rightarrow f$ est continue en 0 0,25 0,25

* $f'(0) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{ch\sqrt{x}-1}{x} = \dfrac{0}{0}$ F.I 0,25 0,25

$ch\sqrt{x}$ est dérivable on peut utiliser la règle de l'Hopital.

$\Rightarrow f'(0) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{(ch\sqrt{x}-1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\, sh\sqrt{x}}{1} = \dfrac{0}{0} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{(sh\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})'}$ 0,25

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\cancel{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\, ch\sqrt{x}}{\cancel{\frac{1}{2\sqrt{x}}}} = \dfrac{1}{2}$ 0,25 0,25 $\Rightarrow f'(0)$ $\exists$ et finie $\Rightarrow f$ est dérivable en 0 0,25

* $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{sh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & ; x>0 \\ \dfrac{1}{2} & ; x=0 \end{cases}$ 0,25 f' est continue pour $x>0$ car $sh\,x$ et $\sqrt{x}$ le sont 0,25

et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{sh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{0}{0} = \dfrac{1}{2} = f'(0) \Rightarrow f'$ est continue en 0 0,25 0,25

Alors $f \in C^1([0,+\infty[)$ 0,25

* $g(x) = ch\sqrt{x}$; $D_g = [0,+\infty[$ et g est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0 car $g'(x) = \dfrac{sh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ non définie en 0 0,25 $\Rightarrow g \notin C^1([0,+\infty[)$. 0,25

Rq : Ici f est le prolongement de classe C^1 de g

b) $\operatorname{argth} x = y \iff x = \operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y} = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x$

$x \in]-1,1[$ $\quad y \in \mathbb{R}$ $\quad$ 0,25 $\quad$ 0,25

$\implies e^{2y} - 1 = x e^{2y} + x \implies e^{2y}(1-x) = 1+x$

$\implies e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$ 0,25 $\implies \ln e^{2y} = 2y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ 0,25

$\implies y = \operatorname{argth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

c) $(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^n = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n = (e^x)^n$ 0,25 0,25

et $(\operatorname{sh} nx + \operatorname{ch} nx)^n = \dfrac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} + \dfrac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} = \dfrac{2}{2} e^{nx} = (e^x)^n$ 0,25 0,25

Exo suppl. /3

a) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n = l_1 \neq l_2 = \underline{\lim}\, u_n \implies (u_n)_{n\geq 0}$ diverge et est bornée 0,5 0,5

b) f discontinue en $x_0 \iff \neg\big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0,\ \forall x \neq x_0,\ |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big)$

$\exists \varepsilon > 0\ \forall \eta > 0, \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

0,5 0,25 0,25 0,25

c) $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ pour $x = 1$ on remarque que

$1^{(1^1)} = 1 = (1^1)^1$ 0,25

et $\ln x^{(x^x)} = \ln (x^x)^x$ 0,25

$x^x \ln x = x \ln x^x = x^2 \ln x$ $\implies x^x = x^2$ 0,25

$\ln x^x = \ln x^2$

$\implies x \ln x = 2 \ln x$

$\implies x = 2$

0,25