جـــامعـــة باجـــي مختـــــار ـــ عنـــابــــــة 2011/01/26

قسم: M.I.A.S

امتحان في مــادة الميكانيــك

المدة: 1^h30

التمرين الأول: (7 نقاط)

في المعلم (o,x,y,z) ذات الأساس المتعامد و المتجانس $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ تعطى النقاط التالية:

$A(2,2,1), B(3,4,-2), C(0,5,-4), D(-1,3,0)$. حيث A,B,C تكون مثلثا

1- أوجد الأشعة: $\vec{V}_1 = \vec{AB}+\vec{BC}$ و $\vec{V}_2 = \vec{AD}-\vec{BD}$

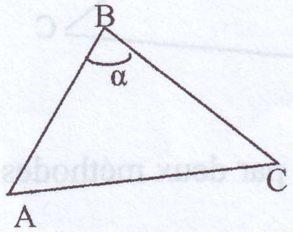
2- احسب الزاوية α.

3- احسب مسقط الشعاع $\vec{V}_2$ على الشعاع $\vec{V}_1$

4- أحسب مساحة المثلث ABC

5- أوجد معادلة المستوي الذي يشمل المثلث ABC

6- هل النقطة D تنتمي الى هذا المستوي؟ علل إجابتك بطريقتين



التمرين الثاني: (6 نقاط)

تعطى حركة نقطة M في الإحداثيات الكرتيزية بالمعادلات التالية:

$x = t+1$ و $y = 2t^2-2$

1- أوجد معادلة مسار النقطة M

2- أوجد المركبات الكرتيزية ثم أحسب الطويلة لكل من سرعة وتسارع النقطة M

3- أحسب التسارع المماسي و التسارع الناظمي و نصف قطر الإنحناء بدلالة الزمن.

4- أحسب نصف قطر الإنحناء في اللحظة $t=0s$

التمرين الثالث: (7نقاط)

تعطى حركة نقطة M في جملة الاحداثيات القطبية بالمعادلة التالية:

$r = d(1+\cos\theta)$ ، $\theta = \omega t$ حيث d و ω ثابتين موجبين

- في جملة الإحداثيات القطبية:

ا- أكتب شعاع الموضع $\vec{OM}$

ب- أوجد المركبات القطبية لكل من السرعة $\vec{V}$ والتسارع $\vec{a}$ للنقطة M.

2- إذا كان $\vec{t}$ شعاع وحدة مماسي للمسار في النقطة M ومتجه نحو الحركة، ماذا تمثل العبارتان:

$(\vec{a}.\vec{t})\vec{t}$ و $\dfrac{\vec{a}\wedge\vec{V}}{|\vec{V}|}$؟

استنتج نصف قطر الإنحناء ρ (t) بدلالة الزمن ثم أحسب قيمته في اللحظة $t=0s$

بالتوفيق

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA — 26 janvier 2011

Faculté des sciences

Département de **MIAS**

Durée : 1^h30

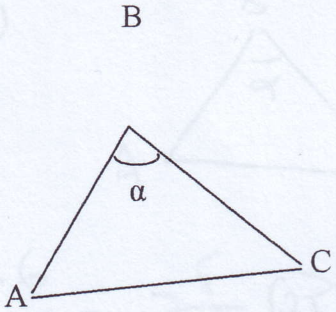
Examen de mécanique

<u>Exercice 1</u> (7 points) :

Dans le repère (O,X,Y,Z) de base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les cordonnées des points suivants :

A(2,2,1), B(3,4,-2) ,C(0,5,-4), D(-1,3,0) .

A,B,C sont les sommets d'un triangle et D un point quelconque



1- Trouver les vecteurs : $\vec{V_1} = \vec{AB} + \vec{BC}$ et $\vec{V_2} = \vec{AD} - \vec{BD}$

2- Calculer l'angle α

3- Calculer la projection du vecteur $\vec{V_2}$ sur le vecteur $\vec{V_1}$

4- Calculer la surface du triangle (A,B,C)

5- Trouver l'équation du plan contenant le triangle (A,B,C)

6- Est-ce que le point D appartient à ce plan ? Justifier votre réponse par deux méthodes.

<u>Exercice 2</u>(6 points) :

On donne le mouvement d'un point M en coordonnées cartésiennes :

$x = t+1$ et $y = 2t^2-2$

1- Donner l'équation de la trajectoire du mouvement du point M :

2- Trouver les vecteurs vitesse et accélération et calculer leurs modules.

3- Calculer les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure(ρ) en fonction du temps et calculer la valeur de ce dernier(ρ)à l'instant t = 1s.

<u>Exercice 3</u> (7 points) :

Le mouvement d'un point M dans le système des coordonnées polaires est donné par les équations :

$$\vec{OM}\begin{cases} r(t) = d(1+cos\theta) \\ \theta(t) = \omega(t) \end{cases}$$ Telles que d et ω sont des constantes positives.

1-Dans le système des coordonnées polaires.

a- Ecrire le vecteur position $\vec{OM}$

b-Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$.

2-Soit $\vec{t}$ un vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M et dirigé dans le sens du mouvement.

Que représentent les grandeurs : $(\vec{a}.\vec{t}).\vec{t}$ et $\frac{\vec{a}\wedge\vec{V}}{|\vec{V}|}$? En déduire le rayon de courbure ρ(t) en fonction du temps. Calculer sa valeur à t = 0s.

Bon courage

Corrigé examen

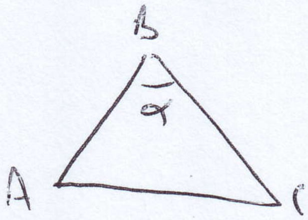
7pts

Ex.1 $A\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\5\\-4\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$

1- $\vec{V_1} = \vec{AB} + \vec{BC}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{V_1} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-5\end{pmatrix}$ (0,5)

$\vec{V_2} = \vec{AB} - \vec{BD} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ (0,5)



2) $\vec{BA}\cdot\vec{BC} = |\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|\cdot\cos\alpha$

(0,5) $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|} = \dfrac{3-2-6}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{-5}{14}$ (0,5)

3) $\text{Proj}\,\vec{V_2}/\vec{V_1} = \dfrac{\vec{V_2}\cdot\vec{V_1}}{|\vec{V_1}|} = \dfrac{-2+6+15}{\sqrt{4+9+25}} = \dfrac{19}{\sqrt{38}}$ (0,5) (0,5)

4) $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB}\wedge\vec{BC}|$ (0,5)

$\vec{AB}\wedge\vec{BC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ -3 & 1 & -2\end{vmatrix} = -\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}$ (0,5)

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{1+121+49} = \dfrac{\sqrt{171}}{2}$ (0,5)

5) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \text{Plan}(P)$

$\vec{AM}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{BC}) = 0$ (0,5)

$\begin{pmatrix}x-2\\y-2\\z-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\11\\7\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -(x-2) + 11(y-2) + 7(z-1) = 0$

$-x + 2 + 11y - 22 + 7z + 7 = 0$

$\boxed{-x - 11y + 7z - 11 = 0}$ (0,5)

6) $D \in (P)$? $-(-1) - 11(3) + 7(0) = 1 - 33 \neq 0$ (0,5) $D \notin (P)$

ou bien $D \in (P) \Rightarrow \vec{AD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{BC}) = 0$ (0,5)

$$\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\11\\7\end{pmatrix} = 3 + 11 - 7 \neq 0 \Rightarrow D \notin (P)$$ (0,5)

Ex. 2 (6 pts)

$$OM \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t^2 - 2 \end{cases}$$

1) $t = x-1$, $y = 2(x-1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x + 2 - 2$

(1) $\boxed{y = 2x^2 - 4x}$ équation d'une parabolle.

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = 1 \text{ (0,5)} \\ V_y = 4t \text{ (0,5)} \end{cases} \rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{1 + 16t^2}$$ (0,5)

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \text{ (0,5)} \\ a_y = 4 \text{ (0,5)} \end{cases} \rightarrow |\vec{a}| = 4$$ (0,5)

$$a_T = \frac{d|\vec{V}|}{dt} = \frac{32t}{2\sqrt{1+16t^2}} = \frac{16t}{\sqrt{1+16t^2}}$$ (0,5)

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 16 - \frac{(16t)^2}{1+16t^2} = \frac{16 + (16t)^2 - (16t)^2}{1+16t^2} = \frac{16}{1+16t^2}$$

$$a_N = \frac{4}{\sqrt{1+16t^2}}$$ (0,5)

$$\rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{(1+16t^2)^{3/2}}{4}$$ (0,5)

à $t = 1s$, $\rho = \dfrac{(1+16)^{3/2}}{4} =$ ~~17,16~~

(0,5)

ou bien à $t = 0s \rightarrow \rho = \dfrac{1}{4}$

Ex.3

$$\vec{OM}\begin{cases} r(t) = d(1+\cos\theta) \\ \theta(t) = \omega . t \end{cases}$$

1) a) $\vec{OM} = r(t)\,\vec{u_r} = d(1+\cos\theta)\,\vec{u_r} = d(1+\cos\omega t)\,\vec{u_r}$ (0,5)

b) $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$ (0,5)

$\vec{v} = -d\omega \sin\omega t\,\vec{u_r} + d\omega(1+\cos\omega t)\,\vec{u_\theta}$ (0,5)

$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u_r} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u_\theta}$ (0,5)

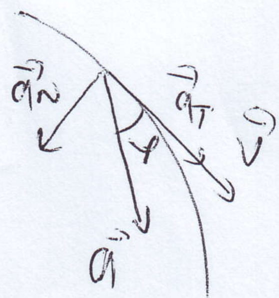
$\vec{a} = \left[-d\omega^2\cos\omega t - d\omega^2(1+\cos\omega t)\right]\vec{u_r} + \left[2(-d\omega\sin\omega t)\omega\right]\vec{u_\theta}$ (0,5)

$\vec{a} = -d\omega^2(1+2\cos\omega t)\,\vec{u_r} - (2d\omega^2\sin\omega t)\,\vec{u_\theta}$

2) $(\vec{a}.\vec{T})$ c'est la projection de $\vec{a}$ sur la tangente $(\vec{T})$ (0,5)

$(\vec{a}.\vec{T}).\vec{T} = \vec{a_T}$ accélération tangentielle (0,5)

$$\frac{|\vec{a}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{a}|.|\vec{v}|\sin(\vec{a},\vec{v})}{|\vec{v}|} = |\vec{a}|.\sin\overbrace{(\vec{a},\vec{v})}^{\varphi} = a_N$$ (0,5)



$$\rho = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a_N}|} = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{a}\wedge\vec{v}|}$$ (0,5)

$|\vec{v}| = d\omega\sqrt{2(1+\cos\omega t)}$ (0,5)

$|\vec{v}|^3 = d^3\omega^3\left[2(1+\cos\omega t)\right]^{\frac{3}{2}}$ (0,5)

$$\vec{a}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u_r} & \vec{u_\theta} & \vec{k} \\ -d\omega^2(2\cos\theta+1) & -2d\omega^2\sin\theta & 0 \\ -d\omega\cos\theta & d\omega(1+\cos\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\wedge\vec{v} = -3d^2\omega^3(1+\cos\theta)\,\vec{k} \quad 0{,}5$$

$$|\vec{a}\wedge\vec{v}| = 3d^2\omega^3(1+\cos\theta)$$

$$\rho(t) = \frac{d^3\omega^3\left[2(1+\cos\theta)\right]^{3/2}}{3d^2\omega^3(1+\cos\theta)} \quad 0{,}5$$

$$\rho(t) = \frac{2\sqrt{2}\,d}{3}(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho(t) = \frac{2}{3}d\sqrt{2(1+\cos\theta)} \quad 0{,}5$$

<u>à $t=0$</u> : $\rho(t) = \frac{2}{3}d\sqrt{4} = \frac{4}{3}d \quad 0{,}5$