MI

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
Faculté des sciences
Département de **MI**

22 janvier 2012

Durée : 1^h30

Examen de mécanique

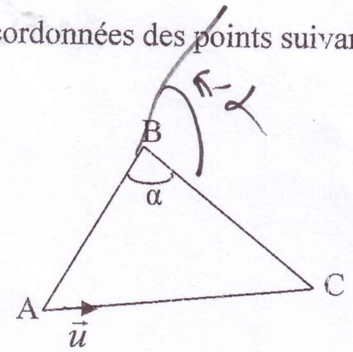
Question de cours :(4 points)

On considère 2 repères, R(OXYZ) fixe et R'(O'X'Y'Z') mobile et un point M lié au repère R' en mouvement quelconque. Donner les lois de composition de la vitesse et de l'accélération en précisant l'expression de chaque terme.

Exercice 1 (5 points) :

Dans le repère (O,X,Y,Z) de base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les cordonnées des points suivants :

A(2,2,-1), B(-3,4,2) ,C(1,3,2), D(-1, 2,3) .



1- Trouver les vecteurs : $\vec{V_1} = \vec{AC} + \vec{BD}$ et $\vec{V_2} = \vec{AD} - \vec{CD}$

2- Calculer l'angle α

3- Calculer la projection du vecteur $\vec{V_2}$ sur le vecteur $\vec{V_1}$

4- Calculer la surface du triangle (ABC)

5-Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire du vecteur $\vec{AC}$,

On définit le double produit vectoriel comme suit :

$$\vec{u} \wedge (\vec{AB} \wedge \vec{u}) = \vec{AB}.(\vec{u}.\vec{u}) - (\vec{AB}.\vec{u}).\vec{u}$$

Que représentent ces 3 expressions vectorielles ? Représenter les par un schéma.

Exercice 2 : (5 points) :

Dans le système des coordonnées cartésiennes, le mouvement d'un point M est donné par les équations suivantes : $x = t^2$ et $y = \frac{t^2}{2} - t$. Déterminer :

1- L'équation de la trajectoire du mouvement du point M.
2- Les vecteurs vitesse et accélérations ainsi que leurs modules.
3- Les accélérations tangentielle et normale et le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps

Exercice 3 : (6 points)

Le mouvement d'un point M dans le plan (O,X,Y) est donné par les équations :

$x = e^{-2t}\cos 2t$
$y = e^{-2t}\sin 2t$

En considérant les coordonnées polaires (r et θ), telles que: $r^2 = x^2 + y^2$ et $\theta = 2t$,

Dans le système de ces coordonnées :

1-Donner l'équation de la trajectoire

2- Ecrire le vecteur position $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

3- Calculer les vecteurs vitesse et accélération et calculer leurs modules

4- Déterminer les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

Bon Réussite

22/01/2012

جـــامعـــة باجـــي مختـــــار ـــ عنـــابـــة

قسم: M.I

امتحان في مـــادة الميكانيك

المدة: ساعة و نصف

سؤال حول الدرس(4 نقاط)

ليكن المعلمان R ثابت و R' متحرك و النقطة M المرتبطة بالمعلم R' في حركة كيفية. عبر عن قانوني تركيب السرعات و التسارعات مع إعطاء القوانين الخاصة بكل عنصر.

التمرين الثاني: (5 نقاط)

في المعلم (o,x,y,z) ذات الأساس المتعامد و المتجانس $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ تعطى النقاط التالية:

A(2,2,-1), B(-3,4,2) , C(1,3,2), D(-1, 2,3) .

1- أوجد الأشعة: $\vec{V_1}=\vec{AC}+\vec{BD}$ و $\vec{V_2}=\vec{AD}-\vec{CD}$

2- أحسب الزاوية α

3- أحسب مسقط $\vec{V_1}$ على $\vec{V_2}$

4- أحسب مساحة المثلث ABC

5- نعرف الجداء الشعاعي المضاعف كما يلي:

$$\vec{u}\wedge(\vec{AB}\wedge\vec{u})=\vec{AB}.(\vec{u}.\vec{u})-(\vec{AB}.\vec{u}).\vec{u}$$

ماذا تمثل هذه العبارات الشعاعية الثلاث. مثلها برسم.

التمرين الثاني: (5 نقاط)

في المعلم الكرتيزي تعطى المعادلات الزمنية لحركة النقطة M:

$$x=t^2 \quad \text{و} \quad y=\frac{t^2}{2}-t$$

1- أكتب المعادلة الكرتيزية لمسارالحركة.

2- أوجد المركبات و الطويلة لكل من السرعة و التسارع في الأساس $(\vec{i},\vec{j})$.

5- أوجد التسارع المماسي و التسارع الناظمي و نصف قطر الإنحناء بدلالة الزمن.

التمرين الثالث:(6 نقاط)

تعرف حركة نقطة M في المستوي (xoy) بالمعادلات التالية: $x=e^{-2t}\cos 2t \qquad y=e^{-2t}\sin 2t$

إذا اعتبرنا الإحداثيات القطبية (r,θ) حيث: $r^2=x^2+y^2$ و θ=2t ، في جملة هذه الإحداثيات

أوجد:

1- معادلة المسار

2- شعاع الموضع $\vec{OM}$ في الأساس $(\vec{u_r},\vec{u_\theta},\vec{k})$

3- المركبات القطبية مع حساب الطويلة لكل من سرعة وتسارع النقطة M.

4- أحسب التسارع المماسي و التسارع الناظمي ونصف قطر الإنحناء بدلالة الزمن.

بالتوفيق

Corrigé examen Mécanique

Question de cours : (4 pts) $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (0,25) L. C. Vitesse

Vitesse absolue : $\vec{V}_a = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}/R$ (0,5)

Vitesse relative $\vec{V}_r = \dfrac{d\vec{O'M}}{dt}/R'$ (0,5)

Vitesse d'entrainement : $\vec{V}_e = \dfrac{d\vec{OO'}}{dt}/R + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$ (0,5)

$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ (0,25)

accélération absolue : $\vec{a}_a = \dfrac{d\vec{V}_a}{dt}/R$ (0,5)

" relative : $\vec{a}_r = \dfrac{d\vec{V}_r}{dt}/R'$ (0,5)

" d'entrainement : $\vec{a}_e =$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}/R + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'M} \quad (0,5)$$

accélération complémentaire ou de Coriolis $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{V}_r$ (0,5)

Exo. 1 (5 pts)

$\vec{V}_1 = \vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} + \vec{BD}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ (0,5)

$\vec{V}_2 = \vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix} - \vec{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ (0,5) $|\vec{AB}| = \sqrt{\ }$

2) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{CB}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{CB}|}$ (0,25)

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}$ $|\vec{AB}| = \sqrt{38}$

$\vec{CB}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ $|\vec{CB}| = \sqrt{17}$

$\cos\alpha = \dfrac{22}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{17}}$ (0,5)

3) $\text{Proj}\ \vec{V}_2/\vec{V}_1 = \dfrac{\vec{V}_2\cdot\vec{V}_1}{|\vec{V}_1|}$ (0,25) $= \dfrac{-1-1+12}{\sqrt{18}} = \dfrac{10}{\sqrt{18}}$ (0,5)

Suite exo 1.

$$S_{ABC} = \frac{|\vec{AB}\wedge\vec{BC}|}{2} \quad (0,5)$$

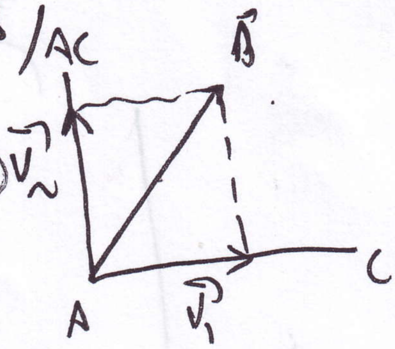
$$\vec{AB}\wedge\vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 12 \\ -3 \end{vmatrix} \quad (0,5)$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{9+144+9}$$

$$S = \frac{\sqrt{162}}{2} \quad (0,5)$$

5) $$\vec{u}\wedge(\vec{AB}\wedge\vec{u}) = \underbrace{\vec{AB}.(\vec{u}.\vec{u})}_{(0,5)\ \vec{AB}} - \underbrace{(\vec{AB}.\vec{u}).\vec{u}}_{(0,5)\ \vec{Proj}\ \vec{AB}/AC}$$

$$\vec{AB} = \vec{V}_1 + \underbrace{\vec{u}\wedge(\vec{AB}\wedge\vec{u})}_{\vec{V}_2}$$



Exo. 2

$$\vec{r}\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^2}{2} - t \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{2} - \sqrt{x} \quad (0,5) \quad \text{éq. traj.}$$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = 2t \\ v_y = t-1 \end{cases} \quad (0,5) \qquad |\vec{v}| = \sqrt{4t^2+(t-1)^2} = \sqrt{5t^2-2t+1} \quad (0,5)$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = 1 \end{cases} \quad (0,5) \qquad |\vec{a}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \quad (0,5)$$

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{10t-2}{2\sqrt{5t^2-2t+1}} = \frac{5t-1}{\sqrt{5t^2-2t+1}} \quad (1)$$

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 5 - \frac{(5t-1)^2}{5t^2-2t+1} = \frac{25t^2-10t+5-25t^2+10t-1}{5t^2-2t+1}$$

$$a_N^2 = \frac{4}{5t^2-2t+1} \longrightarrow a_N = \frac{2}{\sqrt{5t^2-2t+1}} \quad (1)$$

Exo.2 suite

2) Courbure : $\rho = \frac{|\vec{v}|^3}{a_N} = \frac{(5t^2-4t+1)^{3/2}}{2}$ (0,5)

Exo.3 (6 pts)

$M \begin{cases} x = e^{-2t}\cos 2t \\ y = e^{-2t}\sin 2t \end{cases}$

1) $r^2 = x^2 + y^2 = e^{-4t}$ (0,5)

$r = e^{-2t}$ $\quad \theta = 2t \Rightarrow \boxed{r = e^{-\theta}}$ (0,5)

eq. Traj.

2) $\vec{OM} = \vec{r} = r\,\vec{u}_r = e^{-2t}\,\vec{u}_r$ (0,5)

3) $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$ (0,5)

$r = e^{-2t}$ $\qquad \theta = 2t$

$\frac{dr}{dt} = -2e^{-2t} = -2r$ $\qquad \frac{d\theta}{dt} = 2$

$\frac{d^2r}{dt^2} = 4e^{-2t} = 4r$ $\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$

$\vec{v} = -2r\,\vec{u}_r + 2r\,\vec{u}_\theta$ (0,5)

$|\vec{v}| = r\sqrt{4+4} = \sqrt{8}\,r = 2\sqrt{2}\,r = 2\sqrt{2}\,e^{-2t}$ (0,5)

$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u}_\theta$ (0,5)

$\vec{a} = [4r - 4r]\vec{u}_r + [2(-2r)(2) + 0]\vec{u}_\theta = -8r\,\vec{u}_\theta$

$= -8e^{-2t}\,\vec{u}_\theta$ (0,5)

$|\vec{a}| = 8r = 8e^{-2t}$ (0,5)

$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = |-2\sqrt{8}\,e^{-2t}| = 4\sqrt{2}\,e^{-2t}$ (0,5)

$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 64e^{-4t} - 32e^{-4t} = 32e^{-4t}$ (0,5)

$a_N = 4\sqrt{2}\,e^{-2t}$

$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{8e^{-4t}}{4\sqrt{2}\,e^{-2t}} = \sqrt{2}\,e^{-2t}$ (0,5)