Mécanique
2012/2013

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE M.I
MODULE : **Mécanique**

03/02/2013

Examen de MECANIQUE Durée : 1^h30^{mn}

Exercice 1 : (7 pts)

Dans le repère (OXYZ) de base orthonormée ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), on donne les coordonnées des points suivant : A(2,3,1), B(2,-2,2), C(4,1,3) et D(-1,1,2)

1- Trouver les vecteurs $\vec{V}_1 = \vec{AD} + \vec{BC}$ et $\vec{V}_2 = \vec{AB} + \vec{BD}$

2- Calculer l'angle $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$

3- calculer la projection de $\vec{V}_1$ sur $\vec{V}_2$ ainsi que la projection de $\vec{V}_2$ sur le plan XOY

4- Calculer la surface du triangle ABC

5- Trouver un vecteur unitaire $\vec{u}$ perpendiculaire au triangle ABC

6- En utilisant le produit scalaire, démontrer, dans le triangle ABC, la relation suivante : $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos B$

7- Calculer le volume du parallélépipède $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$

Exercice 5 : (8 pts)

Le mouvement d'un point M dans un repère orthonormé R(O,X,Y) de base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donné par les équations suivantes:

$$x = e^{2t}\cos 2t$$
$$y = e^{2t}\sin 2t$$

1-Déterminer la vitesse et l'accélération du mobile dans le système de coordonnées cartésiennes et calculer leurs modules.

2- On considère les coordonnées polaires (r et θ), telles que: $r^2 = x^2 + y^2$ et $\theta = 2t$,

- Qu'elle sera l'équation de la trajectoire dans ce système de coordonnées dans la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$.
- Retrouver de nouveau les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules.

3- Calculer les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

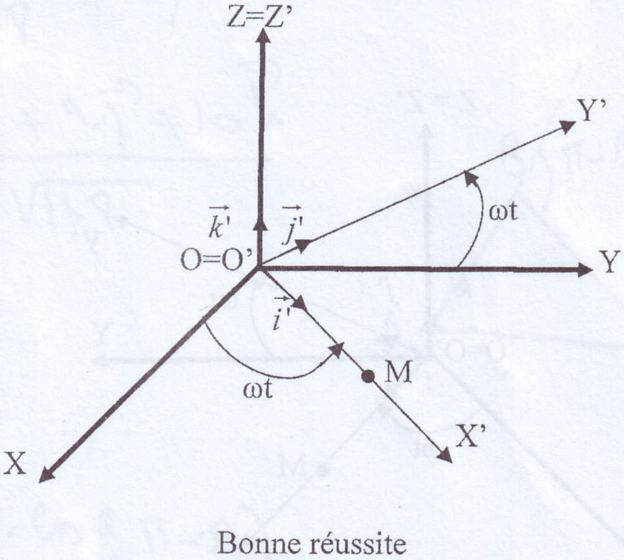
Exercice 3 : (5 pts)

Le repère mobile R'(O'X'Y'Z') tourne autour de l'axe OZ d'un repère fixe R(OXYZ) avec une vitesse angulaire constante ω de telle façon que l'axe O'Z' reste confondu avec l'axe OZ et l'origine O' avec l'origine O.

Un point M se déplace sur l'axe O'X' suivant le mouvement : $O'M = b \sin \alpha t$

b et α sont des constantes positives.

Calculer la vitesse absolue et l'accélération absolue du point M en utilisant les lois de compositions de la vitesse et de l'accélération.



Bonne réussite

Corrigé examen : (Mécanique)

Exo. 1 $A\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$

1) $\vec{V}_1 = \vec{AD} + \vec{BC} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ 0,5

$\vec{V}_2 = \vec{AB} + \vec{BD} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ 0,5

2) $\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \dfrac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| . |\vec{V}_2|} = \dfrac{3-2+2}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \dfrac{3}{\sqrt{84}}$ 0,5 0,5

3) $\mathrm{Proj}\, \vec{V}_1 / \vec{V}_2 = \dfrac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$ 0,5 0,5

$\mathrm{Proj}\, \vec{V}_2 / xoy = -3\vec{i} - 2\vec{j}$, $|\mathrm{Proj}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ 0,5

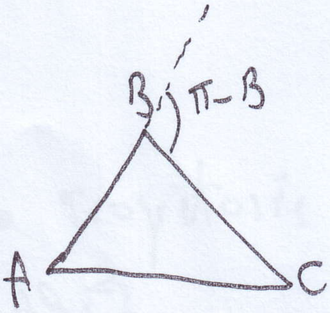
$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{BC}|$ $\vec{AB} \wedge \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\2\\10\end{pmatrix}$ 0,5

$S = \frac{1}{2}\sqrt{64+4+100} = \frac{1}{2}\sqrt{168}$ 0,5

$\vec{u} \perp ABC$

$\vec{S} \perp ABC \Rightarrow$, $\vec{u} = \dfrac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \dfrac{-8\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}}{\sqrt{168}}$ 0,5 0,5

6) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$



$(\vec{AC})^2 = (\vec{AB})^2 + (\vec{BC})^2 + 2\vec{AB} . \vec{BC}$

$(\vec{AC})^2 = (\vec{AB})^2 + (\vec{BC})^2 + 2|\vec{AB}| . |\vec{BC}| . \cos(\pi - B)$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos B$

Suite Exo 1 :

$$V = (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

0,5 $V = 2(-6-2) - 3(6-8) + 1(2+8) = -16 + 6 + 10$

$V = 0 \Rightarrow$

Ex.02

$x = e^{2t} \cos 2t$

$y = e^{2t} \sin 2t$

1) $V_x = 2e^{2t} \cos 2t - 2e^{2t} \sin 2t = 2e^{2t}(\cos 2t - \sin 2t)$ 0,5

$V_y = 2e^{2t} \sin 2t + 2e^{2t} \cos 2t = 2e^{2t}(\sin 2t + \cos 2t)$ 0,5

$|\vec{V}| = 2e^{2t} \sqrt{1 + 1} = 2\sqrt{2}\, e^{2t}$ 0,5

$a_x = 4e^{2t}(\cos 2t - \sin 2t) + 4e^{2t}(-\sin 2t - \cos 2t)$

$a_x = -8e^{2t} \sin 2t$ 0,5

$a_y = 4e^{2t}(\sin 2t + \cos 2t) + 4e^{2t}(\cos 2t - \sin 2t)$

$a_y = 8e^{2t} \cos 2t$ 0,5

$|\vec{a}| = 8e^{2t}$ 0,5

2) $r^2 = x^2 + y^2$ et $\theta = 2t$

0,5

$r^2 = e^{4t} = e^{2\theta} \Rightarrow \boxed{r = e^{\theta}}$ equation de la Trajectoire

$\vec{V} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$; $\vec{OM} = r\vec{u_r}$ $\quad \vec{V} = \dfrac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$

0,5

$\vec{V} = 2e^{2t}\vec{u_r} + 2e^{2t}\vec{u_\theta}$ 0,5

$|\vec{V}| = 2e^{2t}\sqrt{1+1} = 2\sqrt{2}\, e^{2t}$

0,5

II

$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u_r} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u_\theta}$ (0,5)

$\vec{a} = \left(4e^{2t} - 4e^{2t}\right)\vec{u_r} + \left(2 \cdot 2e^{2t} \cdot 2 - 0\right)\vec{u_\theta}$

$\vec{a} = 8e^{2t}\,\vec{u_\theta}$ (0,5) $\qquad |\vec{a}| = 8e^{2t}$ (0,5)

$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 4\sqrt{2}\,e^{2t}$ (0,5)

$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 64e^{4t} - 32e^{4t} = 32e^{4t}$, $a_N = 4\sqrt{2}\,e^{2t}$ (0,5)

$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{8e^{4t}}{4\sqrt{2}\,e^{2t}} = \sqrt{2}\,e^{2t}$ (0,5)

<u>Exo 3</u> $\quad \vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = b\sin\alpha t\,\vec{i'}$ (0,5)

$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$ (0,5) $\qquad \vec{V_r} = \frac{d\vec{O'M}}{dt}\Big|_{R'} = b\alpha\cos\alpha t\,\vec{i'}$ (0,5)

$\vec{V_e} = \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt}\Big|_R}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} = \omega\vec{k'} \wedge b\sin\alpha t\,\vec{i'}$

$\vec{V_e} = b\omega\sin\alpha t\,\vec{j'}$ (0,5)

$\vec{V_a} = b\alpha\cos\alpha t\,\vec{i'} + b\omega\sin\alpha t\,\vec{j'}$ (0,5)

$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$ (0,5)

$\vec{a_r} = \frac{d\vec{V_r}}{dt}\Big|_{R'} = -b\alpha^2\sin\alpha t\,\vec{i'}$ (0,5)

$\vec{a_e} = \underbrace{\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\Big|_R}_{=\vec{0}} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{=\vec{0}} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M}) = \omega\vec{k'} \wedge (b\omega\sin\alpha t\,\vec{j'})$

$a_e = -b\omega^2\sin\alpha t\,\vec{i'}$ (0,5)

$\vec{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r} = 2\omega\vec{k'} \wedge b\alpha\cos\alpha t\,\vec{i'} = 2b\omega\alpha\cos\alpha t\,\vec{j'}$ (0,5)

(111)

$$\vec{a}_a = \sum \vec{a}_i$$

$$\vec{a}_a = (-b\alpha^2 \sin\alpha t - b\omega^2 \sin\alpha t)\,\vec{i} + 2b\omega\alpha \cos\alpha t\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_a = -b(\alpha^2+\omega^2)\sin\alpha t\,\vec{i} + 2b\omega\alpha \cos\alpha t\,\vec{j}$$

0,5

IV

Mécanique
2012/2013

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE M.I
MODULE : **Mécanique**

03/02/2013

Examen de MECANIQUE

Durée : 1^h30^{mn}

Exercice 1 : (7 pts)

Dans le repère (OXYZ) de base orthonormée ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), on donne les coordonnées des points suivant : A(2,3,1), B(2,-2,2), C(4,1,3) et D(-1,1,2)

1- Trouver les vecteurs $\vec{V}_1 = \vec{AD} + \vec{BC}$ et $\vec{V}_2 = \vec{AB} + \vec{BD}$
2- Calculer l'angle $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$
3- calculer la projection de $\vec{V}_1$ sur $\vec{V}_2$ ainsi que la projection de $\vec{V}_2$ sur le plan XOY
4- Calculer la surface du triangle ABC
5- Trouver un vecteur unitaire $\vec{u}$ perpendiculaire au triangle ABC
6- En utilisant le produit scalaire, démontrer, dans le triangle ABC, la relation suivante : $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)\,(BC)\cos B$
7- Calculer le volume du parallélépipède $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$

Exercice 5 : (8 pts)
Le mouvement d'un point M dans un repère orthonormé R(O,X,Y) de base cartésienne ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) est donné par les équations suivantes:

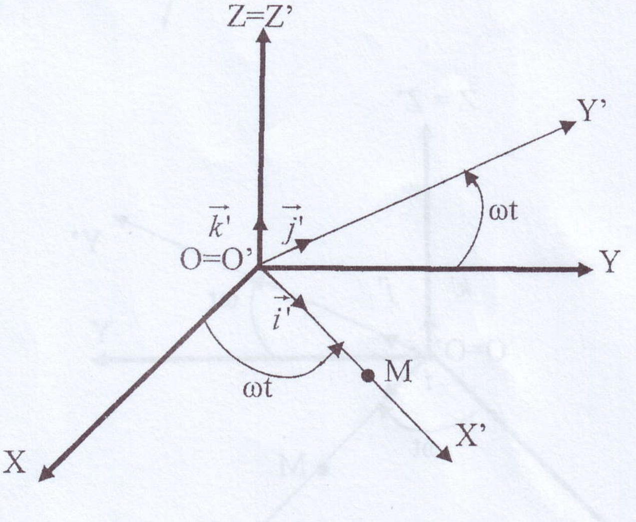
$$x = e^{2t} \cos 2t$$
$$y = e^{2t} \sin 2t$$

1-Déterminer la vitesse et l'accélération du mobile dans le système de coordonnées cartésiennes et calculer leurs modules.
2- On considère les coordonnées polaires (r etθ), telles que: $r^2 = x^2 + y^2$ et $\theta = 2t$,

- Qu'elle sera l'équation de la trajectoire dans ce système de coordonnées dans la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$.
- Retrouver de nouveau les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules.

3- Calculer les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

Exercice 3 : (5 pts)
Le repère mobile R'(O'X'Y'Z') tourne autour de l'axe OZ d'un repère fixe R(OXYZ) avec une vitesse angulaire constante ω de telle façon que l'axe O'Z' reste confondu avec l'axe OZ et l'origine O' avec l'origine O.
Un point M se déplace sur l'axe O'X' suivant le mouvement : $O'M = b \sin \alpha t$
b et α sont des constantes positives.
Calculer la vitesse absolue et l'accélération absolue du point M en utilisant les lois de compositions de la vitesse et de l'accélération.



Bonne réussite