UNIVERSITE BADJI-MOKHTATR (ANNABA) 29/01/2014
Faculté des Sciences
Département du Tronc Commun Maths-Informatique
Module de Mécanique (**L. M. D**)

E. M. D (durée 1h 30')

Exercice 1(6 points)

Dans le repère (OXYZ) de base orthonormée ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), on donne les vecteurs :

$$\vec{r}_1 = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{r}_2 = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$$

a) Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par $\vec{r}_1$
b) Déterminer le cosinus de l'angle des vecteurs $\vec{i}$ .et $\vec{r}_1$
c) Déterminer le sinus de l'angle des vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, en utilisant le produit vectoriel.
d) Calculer la projection de $\vec{r}_1$ sur $\vec{r}_2$

Exercice 2(08 points)

Dans le système des coordonnées cartésiennes, le mouvement d'un point M est donné par les équations suivantes : $x = t^2$ et $y = \dfrac{t^2}{2} - t$

Déterminer :

1- L'équation de la trajectoire du mouvement du point m.
2- Le vecteur vitesse et calculer son module.
3- Le vecteur accélération et calculer son module.
4- Les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure en fonction du temps.
5- Calculer le rayon de courbure à l'instant t = 1s.

Exercice 3 (06points)

Un chasseur tire à la verticale une balle de masse m qui s'échappe du fusil à la vitesse v_0 en un lieu où l'accélération est g.
On néglige la résistance de l'air. Déterminer l'instant t_1 pour lequel la vitesse s'annule et l'altitude h_1 correspondante.

AN: m= 0, 01 Kg, g = 9, 81 m /s^2, V_0 = 400 m/s

Bonne Réussite ***Pr A. GASMI***

<u>Solutions</u> du EMD du [illegible]-01-2014

EXO1)

a - $\vec{r} = |\vec{r}|\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \dfrac{\vec{r_1}}{|\vec{r_1}|}$

$|\vec{r_1}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} = 3{,}7416$ 1pt

$\vec{u} = \dfrac{\vec{i}}{\sqrt{14}} + \dfrac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \dfrac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$

b) $\vec{i} \cdot \vec{r_1} = |\vec{u}|\,|\vec{r_1}| \cos\alpha = 1 \times \sqrt{14} \cos\alpha$

$\vec{i} \cdot \vec{r_1} = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{14}} = \dfrac{1}{3{,}7416} = 0{,}26726$ 1pt

c) $\text{Proj}\ \vec{r_1}/\vec{r_2} = |\vec{r_1}| \cos(\widehat{r_1, r_2})$

$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = |\vec{r_1}|\,|\vec{r_2}| \cos(\widehat{r_1 r_2}) = |\vec{r_1}|\,|\vec{r_2}| \cos\beta$

$= \sqrt{14}\cdot\sqrt{77}\cos\beta \qquad \sqrt{77} = 8{,}7749$

$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = 4 + 10 + 18 = 32$ 1pt

$\Rightarrow \cos\beta = \dfrac{32}{\sqrt{14}\sqrt{77}} = \dfrac{32}{32{,}826} = 0{,}9748$

$\text{Pr}\ \vec{r_1}/r_2 = 3{,}7416 \times 0{,}9748 = 3{,}6473$ 1pt

d) $|\vec{r_1} \wedge \vec{r_2}| = |\vec{r_1}|\,|\vec{r_2}| \sin\beta$

$$\vec{r_1} \wedge \vec{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$(12 - 15)\vec{i} - (6 - 12)\vec{j} + (5 - 8)\vec{k}$ 1pt

$-3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$ 1

$$|\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_2| = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54} = 7{,}3484$$

$$\sin \beta = \frac{7{,}3484}{32{,}826} = 0{,}00022$$

1pt

Ex 2

1- $y = \frac{x}{2} - \sqrt{x}$ 1pt

2. $\vec{v} \begin{cases} v_x = 2t \\ v_y = t-1 \end{cases}$ 1pt $|\vec{v}| = \sqrt{5t^2 - 2t + 1}$ 1pt

3- $\vec{a} \begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = 1 \end{cases}$ 1pt $\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{5}$ 1pt

4) $a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{5t-1}{\sqrt{5t^2-2t+1}}$ 1pt

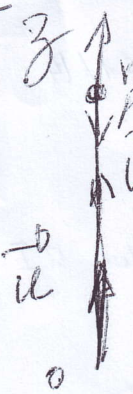
$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 5 - \frac{(5t-1)^2}{5t^2-2t+1}$$

$$a_N = \frac{2}{\sqrt{5t^2-2t+1}}$$ 1pt

$$\rho = \frac{|v|^2}{a_N} = \frac{5t^2-2t+1}{\frac{2}{\sqrt{5t^2-2t+1}}} = \frac{(5t^2-2t+1)^{3/2}}{2}$$ 0,5 pt

5) à $t = 1s$ $\rho = \frac{5-2+1}{2} = \frac{4^{3/2}}{2} = \frac{2^3}{2} = 2^2 = 4$ 0,5 pt

Ex 3



$\vec{v} = v\,\vec{u}$

$\vec{P} = -mg\,\vec{u}$

L'équation fondamentale de la dynamique

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = -mg$ 1pt

$\frac{dv}{dt} = -g \Rightarrow \int dv = \int -g\,dt$

$v = -gt + C_1$ à $t = 0$ $v = v_0$ $\Rightarrow C_1 = v_0$

$\boxed{v = -gt + v_0}$ 1pts

à t_1 la vitesse $v = 0 \Rightarrow 0 = -gt + v_0$

$\Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{v_0}{g}}$ 1pt $t = 40,8\,s$

on sait que $\frac{dz}{dt} = v = -gt + v_0$ 1pt

$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2$

à $t = 0$ $z = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ 1pts

et l'altitude atteinte à $t_1 = \frac{v_0}{g}$ est h_1

$z = h_1 = -\frac{1}{2}g t_1^2 + v_0 t_1 = \frac{v_0^2}{2g}$

$\boxed{h_1 = \frac{v_0^2}{2g}}$ $h_1 = 8155\,m$ 1pt