UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE M.I
MODULE : **Mécanique**
Durée : **1h30**

01/02/ 2015

Examen de Mécanique

Exercice 1 : (7 points)

Dans le repère (O,X,Y,Z) de base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les cordonnées des points suivants : A(2,3,-1), B(3,-2,2) ,C(4,-3,3), D(-1,-2,0) .

1- Trouver les vecteurs : $\vec{V_1} = \vec{AB} + \vec{BC}$ **et** $\vec{V_2} = \vec{AC} - \vec{BD}$

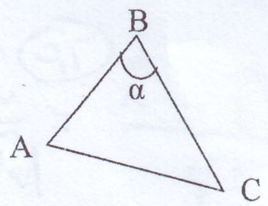
2- Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{u_1}$ parallèle à $\vec{V_1}$, $\vec{u_2}$ parallèle à $\vec{V_2}$ et $\vec{u_3}$ un vecteur unitaire perpendiculaire au plan ($\vec{V_1}, \vec{V_2}$) et en déduire les cosinus directeur du vecteur $\vec{u_2}$

3- Calculer l'angle α

4- Calculer la projection du vecteur $\vec{V_2}$ sur le vecteur $\vec{V_1}$

5- Calculer la surface du triangle (ABC)

6- Montrer que le point D appartient au plan ABC



Exercice 2 : (7 points)

Dans le système des coordonnées cartésiennes, le mouvement d'un point M est donné par les équations suivantes : $x = t^2$ et $y = \dfrac{t^2}{2} - t$

Déterminer :

1- L'équation de la trajectoire du point M.
2- Le vecteur vitesse et son module.
3- Le vecteur accélération et son module.
4- Les accélérations tangentielle, normale et le rayon de courbure en fonction du temps.
5- Calculer le rayon de courbure à l'instant t = 1s.

Exercice 3 : (6 points)

Les équations du mouvement d'un mobile dans le système de coordonnées polaires se déplaçant dans le plan (XOY) sont données par :

$$r = e^{2t} \quad \text{et} \quad \theta = 2t$$

Dans ce système de coordonnées (r ,θ):

1- Déterminer l'équation de la trajectoire r = f(θ).
2- Ecrire les expressions des vecteurs : position, vitesse et accélération dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$
3- Déterminer ces trois vecteurs en fonction du temps et calculer les modules de la vitesse et de l'accélération.

Bonne réussite

Exo.1 9 pts

$A\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}4\\-3\\3\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-1\\-2\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$, $\vec{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix}-4\\0\\-2\end{pmatrix}$

1) $\vec{V_1} = \vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$ 0,5

$\vec{V_2} = \vec{AC} - \vec{BD} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}$ 0,5

2) $\vec{u_1} = \dfrac{\vec{V_1}}{|\vec{V_1}|}$ 0,5 $= \dfrac{2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{56}}$, $\vec{u_2} = \dfrac{\vec{V_2}}{|\vec{V_2}|}$ 0,5 $= \dfrac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$

$\vec{u_3} = \dfrac{\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}}{|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}|} = \dfrac{-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{6}}$

$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -12\vec{i} + 12\vec{j} + 24\vec{k}$
$= 12(-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

$\vec{u_3} = \dfrac{\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}}{|\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}|} = \dfrac{1}{\sqrt{168}}(-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$ 0,5

Ou bien $\boxed{\vec{u_3} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}$

Les Cos directeurs de $\vec{u_2}$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 0,5

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}$ 0,5 $= \dfrac{\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{35}\,\sqrt{3}} = \dfrac{-1-6-3}{\sqrt{105}} = \dfrac{-9}{\sqrt{105}}$ 0,5

$\text{Proj}\,\dfrac{\vec{V_2}}{\vec{V_1}}$ 0,5 $= \dfrac{\vec{V_2} \cdot \vec{V_1}}{|\vec{V_1}|} = \dfrac{12 + 36 + 24}{\sqrt{56}} = \dfrac{72}{\sqrt{56}}$ 0,5

$S_{ABC} = \dfrac{|\vec{AB} \wedge \vec{BC}|}{2}$ 0,5 $\vec{AB} \wedge \vec{BC} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$S = \dfrac{\sqrt{24}}{2}$ 0,5

6) $\vec{n}$ $D \in ABC \Rightarrow \vec{BD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{BC}) = 0$ (0,5)

$\vec{BD}\begin{pmatrix}-4\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AB} \wedge \vec{BC}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

$\vec{BD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{BC}) = 8 + 0 - 8 = 0$ (0,5)

Exo. 2
(7pts)

$\vec{r}\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t^2}{2} - t \end{cases}$

1) $y = \dfrac{x}{2} - \sqrt{x}$ (1)

2) $\vec{v}\begin{cases} v_x = 2t \\ v_y = t - 1 \end{cases}$ (1) $|\vec{v}| = \sqrt{4t^2 + (t-1)^2} = \sqrt{5t^2 - 2t + 1}$ (0,5)

3) $\vec{a}\begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = 1 \end{cases}$ (1) $|\vec{a}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ (0,5)

$a_T = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{10t - 2}{\sqrt{5t^2 - 2t + 1}} = \dfrac{5t - 1}{\sqrt{5t^2 - 2t + 1}}$ (1)

$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 5 - \dfrac{(5t-1)^2}{5t^2 - 2t + 1} = \dfrac{25t^2 - 10t + 5 - 25t^2 + 10t - 1}{5t^2 - 2t + 1}$

$a_N^2 = \dfrac{4}{5t^2 - 2t + 1} \Rightarrow a_N = \dfrac{2}{\sqrt{5t^2 - 2t + 1}}$ (1)

$\rho = \dfrac{|\vec{v}|^2}{a_N} = \dfrac{5t^2 - 2t + 1}{\dfrac{2}{\sqrt{5t^2 - 2t + 1}}} = \dfrac{(5t^2 - 2t + 1)^{3/2}}{2}$ (0,5)

) à $t = 1$ s $\rho = \dfrac{(4)^{3/2}}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ USI (0,5)

Exo: 3 (6 pts)

$r = e^{2t}$ et $\theta = 2t$

1) . $r = e^{\theta}$ (0,1)

2) $\vec{OM} = r\,\vec{u_r} = e^{2t}\,\vec{u_r}$ (0,1)

$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta$ (1)

$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u_r} + \left[2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u_\theta}$ (1)

$r = e^{2t}$ $\qquad$ $\theta = 2t$

$\frac{dr}{dt} = 2e^{2t}$ $\qquad$ $\frac{d\theta}{dt} = 2$

$\frac{d^2r}{dt^2} = 4e^{2t}$ $\qquad$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$

$\vec{OM} = e^{2t}\,\vec{u_r}$

$\vec{V} = 2e^{2t}\,\vec{u_r} + 2e^{2t}\,u_\theta = e^{2t}(\vec{u_r} + \vec{u_\theta})$ (1)

$|\vec{V}| = e^{2t}\sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,e^{2t}$ (0,5)

$\vec{a} = (4e^{2t} - 4e^{2t})\,\vec{u_r} + (2\cdot 2e^{2t}\cdot 2 + 0)\,\vec{u_\theta}$

$\vec{a} = 8e^{2t}\,\vec{u_\theta}$ (1)

$|\vec{a}| = 8e^{2t}$ (0,5)