UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

ALGEBRE 1

1er EXAMEN	**SEMESTER 1**	**2011/2012**
Date: Janvier 2012		**Time: 12.00-13.30**

Exercice 1. **I.** Soit f une application surjective de E vers F. Montrer que

$$\forall\ B \subset F, \text{ on a } f\left(E \cap f^{-1}(B)\right) = B \qquad \textbf{(2pts)}$$

II. On considère le deux applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définies de la façon suivante :

$$f(n) = 2n + 1 \text{ et } g(x) = x^2 - 1$$

a. Montrer que f est injective mais pas surjective, g est surjective mais pas injective. **(3pts)**

b. Caculer $f^{-1}(f\{0,1\})$ et $g(g^{-1}\{0,1\})$. **(2pts)**

Exercice 2. Montrer que la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par :

$$\forall\ (p,q),\ (p',q') \text{ dans } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ (p,q)\,\Re\,(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q. \qquad \textbf{(4pts)}$$

est une relation d'équivalence.

Exercice 3. On définit sur l'ensemble $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ la loi de composition $*$ par:

$$\forall (a,b) \in E^2 : \ a * b = a + b - ab$$

1. Cette loi est-elle commutative? associative? **(2pts)**

2. Possède-t'elle un élément neutre dans E? **(1pt)**

3. E, muni de cette loi $*$ est-il un groupe? **(1pt)**

4. Résoudre dans E l'équation $x * x = 1$. **(1pt)**

Exercice 4. **I.** Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les deux polynomes suivants:

$$A(X) = X^4 - 2X + 1 \text{ et } B(X) = X^2 + X + 1.$$

Calculer le *pgcd* D des polynômes A et B définis ci-dessus. **(2pts)**

II. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de multiplicité de 1 comme racine du polynôme

$$P(X) = nX^{n+2} - 2nX^{n+1} + nX^n - X^3 + 2X^2 - X. \qquad \textbf{(2pts)}$$

Corrigé de L'examen 1 d'algèbre.

Exo 1 I Soit $f : E \to F$ une application surjective.

Pour démontrer que $f(E \cap f^{-1}(B)) = B$, il suffit de démontrer les deux inclusions.

a) $f(E \cap f^{-1}(B)) \subset B$?

Soit $y \in f(E \cap f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in E \cap f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in E \\ \text{et} \\ x \in f^{-1}(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = y \in f(E) \\ \text{et} \\ f(x) = y \in B \end{cases}$, comme f est surjective on a : $f(E) = F$

$\Rightarrow \begin{cases} y \in F \\ \text{et} \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow y \in F \cap B = B$ car $B \subset F$. 1pt

b) pour vérifier que $B \subset f(E \cap f^{-1}(B))$ on prend un $y \in B$ et f est surjective $\Rightarrow \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = y \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \\ \text{et} \\ x \in E \end{cases} \Rightarrow x \in E \cap f^{-1}(B)$ 1pt

$\Rightarrow f(x) = y \in f(E \cap f^{-1}(B))$, donc on déduit que

$$\boxed{f(E \cap f^{-1}(B)) = B}$$

II : Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n+1$, $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto x^2 - 1$

a1) * L'injectivité de f.

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 + 1 = 2n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

donc, f est injective. 1,5 pts

* La surjectivité de f.

f n'est pas surjective car pour $N = 2$ il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que. $f(n) = 2$, car si on 1,5 pt suppose que $f(n) = 2 \Rightarrow 2n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1/2 \notin \mathbb{N}$.

---

b1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$n \to n^2 - 1$

* g n'est pas injective car pour $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

on a : $g(-1) = g(1) = 0$

* g n'est pas surjective car pour $y = -2$ il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -1$ absurde.

0,5 pts

b1) * $f^{-1}(f\{0,1\})$?

0,5 pts

on $f(\{0,1\}) = \{f(n), n \in \{0,1\}\} = \{1,3\} \Rightarrow$

$f^{-1}(f\{0,1\}) = f^{-1}(\{1,3\}) = \{n \in \mathbb{N}, f(n) \in \{1,3\}\} = \{0,1\}$

* $g(g^{-1}(\{0,1\})$. on a : $g^{-1}(\{0,1\}) = \{n \in \mathbb{R} : g(x) \in \{0,1\}\}$

$= \{1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ 0,5 pts

$\Rightarrow g(g^{-1}(\{0,1\})) = g(\{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{0,1\}$ 0,5 pts

Exo2 : On définit sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ La relation

$$\forall (p,q),(p',q') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* : (p,q) R (p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$$

- La réflexivité : $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^+$: On a : $pq = pq$ (1pt)

$$\Rightarrow (p,q) R (p,q).$$

- La symétrie : $\forall (p,q),(p',q') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ si $(p,q) R (p',q')$

$$\Leftrightarrow pq' = p'q \Leftrightarrow p'q = pq' \Leftrightarrow (p',q') R (p,q)$$ (1pt)

donc, elle est symétrique.

. La transitivité : $\forall (p,q),(p',q'),(p'',q'') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

$$\text{si } \begin{cases} (p,q) R (p',q') \\ \text{et} \\ (p',q') R (p'',q'') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pq' = p'.q \\ p'.q'' = p''.q' \end{cases}$$

$$\Rightarrow pq'' = p\left(\frac{p''.q'}{p'}\right) = (p.q')\left(\frac{p''}{p'}\right) = (p'.q)\left(\frac{p''}{p'}\right) = p''.q$$ (2pts)

$$\Leftrightarrow p.q'' = p''.q \Leftrightarrow (p.q) R (p''.q'') \Rightarrow R \text{ est transitive}$$

Exo3 : Sur $E = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on definit :

$$\forall (a,b) \in E^2 : a * b = a + b - ab$$

1- La commutativité : $\forall (a,b) \in E^2$: (1pt)

$$a * b = a + b - ab = b + a - ba = b * a \Rightarrow \text{commutative}$$

- L'associativité : $\forall (a,b,c) \in E^3 : (a * b) * c \overset{?}{=} a * (b * c)$

On a : $(a*b)*c = a+b+c-(ab+ac+bc)+abc \rightarrow (*)$

et $a*(b*c) = a+b+c-(ab+ac+bc)+abc \rightarrow (**)$

de $(*)$ et $(**)$ on déduit que $*$ est associative. 1pt

-2. le neutre dans E.

$\exists e \in E : \forall a \in E : a*e = a \Leftrightarrow a+e-ae = a$

$\Rightarrow e(1-a) = 0 \Rightarrow e = 0 \in E$. 1pt

3. $(E,*)$ est un groupe si pour $a \in E$ $\exists a' \in E$ tel que

$a*a' = 0 \Leftrightarrow a+a'-aa' = 0$

$\Rightarrow a' = \dfrac{a}{a-1} \in E$, car $a-1 \neq 0$ 1pt

donc, $(E,*)$ est un groupe commutatif

4- $x*x = 1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \notin E$ 1pt

Exo4 I : le pgcd(A, B) ? D'après l'algorithme d'euclide

on a : $R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1}$ avec $R_0 = A$, $R_1 = B$

- Divisons $\dfrac{A}{B} \Leftrightarrow \dfrac{R_0}{R_1} \Leftrightarrow A = R_0 = R_1 \underbrace{(X^2-X)}_{Q_1} + \underbrace{(-X+1)}_{R_2}$ 1

2

Comme $R_2 \neq 0$ on divise R_1 par R_2

$\Leftrightarrow R_1 = B = R_2 \cdot \underbrace{(-X-2)}_{Q_2} + \underbrace{3}_{R_3}$ 0,1

leur PGCD = 1.

On déduit que A et B sont premiers entre eux car $R_3 = \underline{\underline{cte}}$ 0,1

II $P(X) = nX^{n+2} - 2nX^{n+1} + nX^n - X^3 + 2X^2 - X$

$P(1) = n - 2n + n - 1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{P(1) = 0}$ 0,1

$\Rightarrow P(X) = (X-1)\underbrace{(nX^{n+1} - nX^n - X^2 + X)}_{Q(X)}$

avec $Q(1) = n - n - 1 + 1 = 0 \Rightarrow Q_1(1) = 0$

de la division euclidienne on trouve

$$P(X) = (X-1)\underbrace{(nX^{n+1} - nX^n - X^2 + X)}_{Q_1(X)}$$ 0,5 pts

$Q_1(1) = n - n - 1 + 1 \Rightarrow Q_1(1) = 0$ 0,5 pts

$$\Rightarrow Q_1(X) = (X-1)\underbrace{(nX^n - X)}_{Q_2}$$ 0,5 pts

et $Q_2(1) = n - 1 \neq 0$

d'où $P(X) = (X-1)^2(nX^n - 1)$