Algèbre I
2012/2013

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

ALGEBRE 1

1er EXAMEN | SEMESTER 1 | 2012/2013

Date: 10 Fevrier 2013

Exercice 1.

I. a) Citer les différents types de raisonnement mathématiques.

b) Soit f une application de E vers F. Montrer que
$$\forall A \subset E,\ \forall B \subset F \text{ on a } f\left(A \setminus f^{-1}(B)\right) = f(A) \setminus B$$

II. Soit f l'application de $E = \{1,2,3,4\}$ dans $F = \{0,1,3,5,7,10\}$ définie par son graphe
$$G = \{(1,3),(2,5),(3,5),(4,0)\}$$
Déterminer $f^{-1}(\{5\})$ et $f^{-1}(\{0,1,3\})$.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\Re$ par :
$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\quad x \Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1- Montrer que $\Re$ une relation d'équivalence.

2- Déterminer la classe d'équivalence de 0.

Exercice 3. On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}$ la loi de composition $*$ par:
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 :\ a * b = a + b - a^2 b^2$$

1. Vérifier que $*$ est commutative

2. La loi $*$ est-elle associative? Possède-t'elle un élément neutre dans $\mathbb{R}$?

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation $1 * x = 1$.

Exercice 4. **I.** Citer le théorème de Bezout pour deux polynômes dans $IK[X]$.

II Soit
$$A(X) = 3X^3 + 2X^2 + 2 \text{ et } B(X) = X^2 - 2.$$

1- Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le $pgcd$ D de A et B.

2- En déduire deux polynômes U et V tels que $UA + VB = D$.

Corrigé de l'Examen I

Exo1 a) Les differents types de raisonnement mathématiq- sont

- La méthode directe (0,25) pts
- La contraposé (0,25) pts
- l'absurde (0,25) pts
- Le contre exemple (0,25) pts
- La recurence (0,25) pts

b/ Montrons que $\forall A \subset E$, $\forall B \subset F$ avec $f : E \to F$ une application on a :

$$f(A \setminus f^{-1}(B)) = f(A) \setminus B.$$

L'inclusion $f(A\setminus f^{-1}(B)) \overset{?}{\subset} f(A)\setminus B$.

Soit $y \in f(A\setminus f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in A\setminus f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$, comme $x \in A \setminus f^{-1}(B) = A \cap \overline{f^{-1}(B)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{et} \\ x \in \overline{f^{-1}(B)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{et} \\ x \notin f^{-1}(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \in f(A) \\ \text{et} \\ f(x) \notin B \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = y \in f(A) \cap \overline{B} = f(A)\setminus B \Rightarrow f(A\setminus f^{-1}(B)) \subset f(A)\setminus B$ (0,75) pts

L'inclusion $f(A)\setminus B \overset{?}{\subset} f(A\setminus f^{-1}(B))$

Soit $y \in f(A)\setminus B = f(A) \cap \overline{B} \Rightarrow \begin{cases} y \in f(A) \\ \text{et} \\ y \in \overline{B} \end{cases}$

Comme $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A$ tel que $f(x) = y$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = y \in f(A) \\ \text{et} \\ f(x) = y \in \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \in f(A) \\ \text{et} \\ f(x) \notin B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{et} \\ x \notin f^{-1}(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{et} \\ x \in \overline{f^{-1}(B)} \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap \overline{f^{-1}(B)}$$

$$\Rightarrow x \in A \setminus f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) = y \in f(A \setminus f^{-1}(B))$$

$$\Rightarrow f(A) \setminus B \subset f(A \setminus f^{-1}(B))$$ 0,75 pts.

II. Soit $f : E \to F$, avec $E = \{1, 2, 3, 4\}$

et $F = \{0, 1, 3, 5, 7, 10\}$ définie par son graphe.

$$G = \{(1,3), (2,5), (3,5), (4,0)\}$$

donc, l'application f est $f(1) = 3$, $f(2) = 5$

$f(3) = 5$, $f(4) = 0$. 0,25 pts

$f^{-1}(\{5\}) = \{x \in E : f(x) \in \{5\}\} = \{2, 3\}$ 1pt

$f^{-1}(\{0, 1, 3\}) = \{x \in E : f(x) \in \{0, 1, 3\}\} = \{1, 4\}$ 1pt

Exo2 La relation $\mathcal{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence car :

a) La réflexivité :

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x^2 = x - x = 0$, donc, $x R x$ (1pt)

b/ La symétrie

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$\Rightarrow -(y^2 - x^2) = -(y - x) \Rightarrow y^2 - x^2 = y - x$

$\Rightarrow y R x$ (1pt)

/ La transitivité

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x R y)$ et $(y R z) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = x - y \\ \text{et} \\ y^2 - z^2 = y - z \end{cases}$ par addition on obtient $x^2 - z^2 = x - z$

$\Rightarrow x R z$ d'où R est transitive (1pt)

.. La classe d'équivalence de $\dot{0}$

$\dot{0} = \{ y \in \mathbb{R} : 0 R y \} = \{ y \in \mathbb{R} : y^2 = y \}$

$= \{0, 1\}$ (1pt)

Exo3 On définie la loi de composition $*$ sur $\mathbb{R}$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : a * b = a + b - a^2 b^2.$

1/ La commutativité

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a * b = b * a$?

$a * b = a + b - a^2 b^2 = b + a - b^2 a^2 = b * a$ d'où la commutativité (1pt)

2/ L'associativité.

$*$ n'est pas associative car pour : $a = 1$, $b = c = -1$

on a :

$1 * (-1 * -1) = 1 * (-1 - 1 - (-1)^2(-1)^2) = 1 * (-3)$

$= 1 - 3 - (1)^2(-3)^2 = -11$

et $(1 * (-1)) * (-1) = [1 - 1 - (1)^2(-1)^2] * (-1) = -1 * -1$

$= -1 - 1 - (-1)^2(-1)^2 = -3.$

d'où $1 * (-1 * -1) \neq (1 * (-1)) * (-1)$ (1pt)

3/ Le neutre.

$\exists e \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} : a * e = a$. ($*$ est commutative)

$\Leftrightarrow a + e - a^2 e^2 = a \Rightarrow e(1 - a^2 e) = 0 \Rightarrow e = 0$

ou $a = \pm\sqrt{\frac{1}{e}}$ comme $a * 0 = a$ et le neutre est unique $\Rightarrow e = 0$ (1,5pt)

4/ Résolution dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'égt $\dot{1} * x = \dot{1}$

$1 * x = 1 \Leftrightarrow 1 + x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$

$\Rightarrow$ les slts $S = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{3}, \dot{4}\}$. (1,5pt)

Exo4 :

I/ Le théorème de Bezout

Theo : Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, D est le pgcd de A et B. Il existe deux polynômes U et V (2pts)
Tels que $D = A \cdot U + B \cdot V$.

II Le pgcd de $A = 3X^3 + 2X^2 + 2$ et $B = X^2 - 2$
avec l'algorithme d'euclide $R_{n-1} = R_n \varphi_n + R_{n+1}$
avec $R_0 = A$ et $R_1 = B$.

$$\begin{array}{l|l}
3X^3 + 2X^2 + 2 & X^2 - 2 \\
\hline
-3X^3 + 6X & 3X + 2 \\
\hline
2X^2 + 6X + 2 & \varphi_1 \\
-2X^2 + 4 & \\
\hline
R_2 = 6X + 6 &
\end{array}$$

$\Rightarrow R_0 = R_1 \varphi_1 + R_2$

1,5 pts

Comme $R_2 \neq 0$, on continue $R_1 = R_2 \varphi_2 + R_3$

$$\begin{array}{l|l}
X^2 - 2 & 6X + 6 \\
\hline
-X^2 - X & \frac{1}{6}X - \frac{1}{6} \\
\hline
-X - 2 & \\
X + 1 & \\
\hline
R_3 = -1 &
\end{array}$$

1,5 pts

Comme $R_3 = \underline{cte}$, on déduit que A et B sont premier entre eux c.à.d : $A \wedge B = 1$.

- Déduire U, V tels que $AU + BV = D = pgcd$

$R_3 = R_1 - R_2 \varphi_2 = R_1 - (R_0 - R_1 \varphi_1) \varphi_2$

$\Rightarrow R_3 = R_0(-\varphi_2) + R_1(1 + \varphi_1 \cdot \varphi_2) = -1$

$\Rightarrow \boxed{1 = R_0(\varphi_2) + R_1(-1 - \varphi_1 \varphi_2)}$ (1pt)