UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

ALGEBRE 1

1^er^ EXAMEN | SEMESTER 1 | 2013/2014

Date: Janvier 2014 | Time: 10.00-11.30 (reading time)

Exercice 1. **I.** Montrer par raisonnement direct qu'il n'existe pas de couple $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $m^2 = n(n+1)(n+2)$. 5 pts

II. Soit f une application surjective de E vers F. Montrer que

$$\forall\, B \subset F, \text{ on a } f\left(E \cap f^{-1}(B)\right) = B$$

III. Soit l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par: $f(n,m) = nm$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie par: $g(n) = (n, (n^2+1))$

a) Déterminer $f(\{(2,1),(1,2)\})$ et $g^{-1}(\{(1,1)\})$.

b) Les applications f et g sont-elles injectives? Surjectives ?

Exercice 2. Soit E un ensemble muni d'une relation $\Re$ réflexive et transitive. On définit sur E la relation S par: 4 pts

$$\forall\,(a,b) \in E^2 : \ aSb \Leftrightarrow a\Re b \text{ et } b\Re a.$$

Montrer que S est une relation d'équivalence.

Exercice 3. Soit $*$ la loi définie sur $E = \mathbb{R} - \{2\}$ par: 5 pts

$$\forall\ (a,b) \in E^2; \quad a * b = 2a + 2b - ab - 2$$

a) Démontrer que $*$ est une loi de composition interne dans E.

b) Démontrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

Exercice 4. **I.** Citer lethéorème de Bezout pour deux polynômes dans $IK[X]$. 6 pts

II. a) Soit dans $\mathbb{R}[X]$

$$A(X) = 3X^3 + 2X^2 + 2 \text{ et } B(X) = X^2 - 2.$$

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le *pgcd* D de A et B.

b) En déduire deux polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.

Corrigé

Exo1

I. Nous utilisons le raisonnementpar l'absurde.

On supposequ'il existe un couple $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $m^2 = n(n+1)(n+2)$,alors on a 3 suppositions

1) $\begin{cases} m = n \\ m = (n+1)(n+2) \end{cases} \Rightarrow n = (n+1)(n+2) \Rightarrow n^2 + 2n + 2 = 0$. Ce qui est absurde, car cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}^*$. 0,5 pts

2) $\begin{cases} m = (n+1) \\ m = n(n+2) \end{cases} \Rightarrow n + 1 = n(n+2) \Rightarrow n^2 + n - 1 = 0$. Ce qui est absurde, car cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}^*$. 0,5 pts 3) $\begin{cases} m = (n+2) \\ m = n(n+1) \end{cases} \Rightarrow n+2 = n(n+1) \Rightarrow n^2 - 2 = 0$. Ce qui est absurde, car cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}^*$. 0,5 pts

II. a) Soit $y \in f(E \cap f^{-1}(B))$, alors, il existe un $x \in E \cap f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$. Comme $x \in E$ et $x \in f^{-1}(B)$ on a $f(x) = y \in f(E)$ et $f(x) = y \in B$. D'où $f(E \cap f^{-1}(B)) \subset B$. 0,75 pts

b) Pour l'autre inclusion, soit $y \in B$ et f est surjective, alors, il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$ d'où $x \in f^{-1}(B)$. Alors, $x \in E \cap f^{-1}(B)$ et $f(x) = y \in f(E \cap f^{-1}(B))$. de a) et b) on a $f(E \cap f^{-1}(B)) = B$. 0,75 pts

III. a) Déterminons $f(\{(2,1),(1,2)\})$ et $g^{-1}(\{(1,1)\})$ pour les deus applications $f(n,m) = nm$ et $g(n) = (n,(n^2+1))$. Alors,

$f(\{(2,1),(1,2)\}) = \{f(n,m), \text{ tel que } (n,m) \in \{(2,1),(1,2)\}\} = \{f(1,2),\ f(2,1)\} = \{2\}$. 0,5 pt Maintenant, pour $g^{-1}(\{(1,1)\})$, on a:

$g^{-1}(\{(1,1)\}) = \{(n \in \mathbb{N} \text{ tel que } g(n) \in (1,1)\} \Rightarrow g(n) = (1,1) \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ (n+1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} n = 1 \\ 2^2 = 1 \end{cases}$ ce qui est absurde. D'où $g^{-1}(\{(1,1)\}) = \varnothing$. 0,5 pts

b)- L'application f n'est pas injective car $f(1,2) = f(2,1) = 2$ 0,25

-L'application f est surjective car pour tout M dans $\mathbb{N}$ il existe un $(1,M)$ tel que $f(1,M) = M$. 0,25

-L'application g n'est pas surjective car pour $(1,1) \in \mathbb{N}^2$ il n'existe pas de n tel que $g(n) = (1,1)$. (d'aprés (a) de III). 0,25

- L'application g est injective car pour tout n_1 et n_1 dans $\mathbb{N}$, $g(n_1)$=$g(n_2) \Rightarrow (n_1,(n_1^2+1)) =$

$(n_2, (n_2^2+1)) \Rightarrow n_1 = n_2$ 0,25

Exo2 1) La reflexivité: Soit $x \in E$, alors $x\Re x$, d'où xSx. 1pt
2) La symétrie: Soit x, y dans E, alors si $xSy \Leftrightarrow x\Re y$ et $y\Re x \Leftrightarrow y\Re x$ et $x\Re y$ d'où la symétrie. 1pt
3)La transitivité: Soit x, y, z alors si $\begin{cases} xSy \\ et \\ ySz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\Re y \text{ et } y\Re x \\ \text{et} \\ y\Re z \text{ et } z\Re y \end{cases} \Rightarrow (x\Re y \text{ et } y\Re z)$, de la transitivité de $\Re \Rightarrow x\Re z$. De la meme manière, on a $(z\Re y \text{ et } y\Re x)$, de la transitivité de $\Re \Rightarrow z\Re x$. D'où la transitvité de S. Donc, S estune relation d'équivanlence. 2pts

Exo 3. La loi $*$ sur $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ est définie par: $\forall (a,b) \in E^2 = 2a + 2b - ab - 2$. Cette loi $*$ est dite un LCI si

$$\forall (a,b) \in E^2 \qquad a * b = 2a + 2b - ab - 2 \in E\ ?$$

1. Raisonons par l'absurde: Alors, si on suppose que $a * b \notin E$, i.e $a * b = 2$
$\Rightarrow 2a + 2b - ab - 2 = 2 \Longrightarrow b(2-a) - 2(2-a) = 0 \Longrightarrow (2-a)(b-2) = 0$
$\Longrightarrow a = 2$ ou $b = 2$, ce qui est absurde car $a \in E$ et $b \in E$ $(a \neq 2$ et $b \neq 2)$. Donc $*$ est une loi de composition interne dans E. 1pt

b) $(E, *)$ Groupe commutatif ?

1- Associativité

$\forall (a,b,c) \in E^3 \qquad (a*b)*c = a*(b*c)?$

on calcule les deux quantités $(a*b)*c$ et $a*(b*c)$, on remarque qu'elle sont égales, donc $*$ est associative. 1pt

2-Commutativité

$\forall (a,b) \in E^2 \quad a*b = 2a + 2b - ab - 2 = 2b + 2a - ba - 2 = b*a$ 1pt

$*$ est donc commutative dans E.

3-Existence du neutre

$\exists e \in E, \forall a \in E: \ a * e = e * a = a.$

Comme $*$ est commutative il suffit de trouver un $e \in E$ tel que $\forall a \in E \quad a * e = a.$

Soit $a \in E, \quad a * e = a \Longrightarrow 2a + 2e - ae - 2 = a$

$\Longrightarrow e(2-a) - (2-a) = 0 \quad \forall a \in E$

$\Longrightarrow (2-a)(e-1) = 0 \ \ \forall a \in E \Longrightarrow e = 1 \in E$

Donc il existe un élément neutre pour $*$ dans E égal à $1 \in E$. 1pt

4-Existence du symétrique

$\forall a \in E \quad \exists a' \in E: \ a * a' = a' * a = 1$

$a * a' = 1 \Longrightarrow 2a + 2a' - aa' - 2 = 1$

$\Longrightarrow a'(2-a) = 3 - 2a \Longrightarrow a' = \frac{3-2a}{2-a}$. Démontrons que $a' \in E$. Si on suppose que $a' \notin E$ ceci implique que

$$\frac{3-2a}{2-a} = 2$$

1pt

$\Longrightarrow 3 - 2a = 4 - 2a \Longrightarrow 3 = 4$ ce qui est absurde. Donc $a' \in E \quad \forall a \in E$. De 1, 2, 3 et 4 on déduit que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

I/ Le theorème de Bezout

Theo: Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$, D est le pgcd de A et B. Il existe deux polynômes U et V Tels que $D = A \cdot U + B \cdot V$. (2pts)

II Le pgcd de $A = 3X^3 + 2X^2 + 2$ et $B = X^2 - 2$ avec l'algorithme d'euclide $R_{n-1} = R_n \varphi_n + R_{n+1}$

avec $R_0 = A$ et $R_1 = B$.

$$\begin{array}{l|l} 3X^3 + 2X^2 + 2 & X^2 - 2 \\ \hline -3X^3 + 6X & 3X + 2 \\ \hline 2X^2 + 6X + 2 & \varphi_1 \\ -2X^2 + 4 & \\ \hline R_2 = 6X + 6 & \end{array} \Rightarrow R_0 = R_1 \varphi_1 + R_2$$

(1,5pts)

Comme $R_2 \neq 0$, on continue $R_1 = R_2 \varphi_2 + R_3$

$$\begin{array}{l|l} X^2 - 2 & 6X + 6 \\ \hline -X^2 - X & \frac{1}{6}X - \frac{1}{6} \\ \hline -X - 2 & \\ X + 1 & \\ \hline R_3 = -1 & \end{array}$$

(1,5pts)

Comme $R_3 = \underline{cte}$, on déduit que A et B sont premier entre eux c.à.d: $A \wedge B = 1$.

2- Déduire U, V tels que $AU + BV = D = pgcd$

$$R_3 = R_1 - R_2 \varphi_2 = R_1 - (R_0 - R_1 \varphi_1) \varphi_2$$

$$\Rightarrow R_3 = R_0(-\varphi_2) + R_1(1 + \varphi_1 \cdot \varphi_2) = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = R_0(\varphi_2) + R_1(-1 - \varphi_1 \varphi_2)}$$ (1pt)