UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

ALGEBRE 1

1er EXAMEN	**SEMESTER 1**	**2011/2012**

Date: Janvier 2015

Time: 10.00-11.30
(reading time)

Exercice 1. (5 pts)

I. Soit f une application de E vers F. Montrer que f est injective si et seulement si:

$$\text{pour toute partie } A \text{ de } E, \text{on a } A = f^{-1}(f(A)).$$

II. Soit f l'application de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par:

$$f(1) = 4, \; f(2) = 1, \; f(3) = 2, \; f(4) = 2$$

- **a.** Déterminer $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{1, 2\})$, $f^{-1}(\{3\})$.
  b. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}([1, 2])$.

Exercice 2. (5 pts). Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $\Re$ en posant pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

$$x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^n.$$

a. Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.

b. Soit $A = \{2, 4, 16\}$. Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de A..

Exercice 3. (5 pts). Soient $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ une loi de composition interne définie sur E par:

$$\forall \; (a, b), \; (c, d) \in E; \; (a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

1. La loi $*$ est-elle commutative ?

2. Monter que $(E, *)$ est un groupe.

Exercice 4. (5 pts)

I. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les deux polynomes suivants:

$$A(X) = X^4 - 2X + 1 \text{ et } B(X) = X^2 + X + 1.$$

Calculer le *pgcd* D des polynômes A et B définis ci-dessus.

1. **II.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Quel est le reste de la division euclidienne du polynôme

$$P(X) = (X+1)^n + X^n + 1 \text{ par } Q(X) = X(X+1).$$

Corrigé du 1er examen.

Exo1. $f : E \to F$ une application. Pour montrer que : f injective $\Leftrightarrow \forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$.

on montre la double inclusion. pour la 1er implication

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ Soit $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

$$\Rightarrow \boxed{A \subset f^{-1}(f(A))}. \quad 0{,}5 \text{ pts}$$

Maintenant, soit $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow$ $\exists x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$, comme f est injective $\Rightarrow x = x' \Rightarrow x \in A$, d'où $\boxed{f^{-1}(f(A)) \subset A}$ 0,5 pts

$\overset{(2)}{\Longleftarrow}$ On suppose que $A = f^{-1}(f(A))$ et on démontre que f est injective.

Soit $x_1, x_2 \in E$, avec $f(x_1) = f(x_2)$, alors, si on prend $A = \{x_1\} \Rightarrow f(A) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} \Rightarrow$ $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{\underbrace{f(\{x_1\})}_{y}\}) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$, comme $f^{-1}(f(A)) \subset A \Rightarrow \{f^{-1}(y)\} \subset \{x_1\}$ et aussi $x_2 \in \{f^{-1}(y)\}$.

car $f(x_2) = y \Rightarrow x_2 \in \{x_1\} \Rightarrow x_1 = x_2$, d'où f est injective. 1 pt

II Déterminons.

1) $f^{-1}(\{2\}) = \{x \in E ; f(x) \in \{2\}\} = \{3, 4\}$. (0,5 pts)

$f^{-1}(\{1, 2\}) = \{x \in E ; f(x) \in \{1, 2\}\} = \{2, 3, 4\}$. (0,5 pts)

$f^{-1}(\{3\}) = \{x \in E ; f(x) \in \{3\}\} = \emptyset$ (0,5 pts)

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^2$.

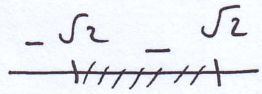
$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \in \{1\}\} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

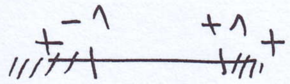
$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{-1, +1\}$. (0,5 pts)

- $f^{-1}([1, 2]) = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \in [1, 2]\}$

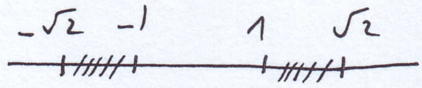
$\Rightarrow x^2 \in [1, 2] \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ \text{et} \\ x^2 \geq 1. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \Rightarrow \\ x^2 \geq 1 \Rightarrow \end{cases}$





$\Rightarrow$



$\Rightarrow f^{-1}([1, 2]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$. (1pt)

Exo2. Dans $\mathbb{N}^*$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, \; x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$.

1/ La réflexivité : $x \mathcal{R} x$ car $\exists n = 1$ tel que $x = x^1$. (1pt)

2/ L'anti-symétrie : $\forall x, y \in \mathbb{N}^*, \; x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x \Leftrightarrow$

$\exists n \in \mathbb{N}^* : y = x^n$ et $\exists n' \in \mathbb{N}^* : x = y^{n'} \Rightarrow y = (y^{n'})^n = y^{nn'}$

$\Rightarrow nn' = 1 \Rightarrow n = n' = 1$ 0,5pts

$\Rightarrow \boxed{y = x} \Rightarrow R$ est anti-sym.

1pt

/ La transitivité

Soit $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} xRy \\ \text{et} \\ yRz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}^* : y = x^n \\ \exists n' \in \mathbb{N}^* : z = y^{n} \end{cases}$

$\Rightarrow z = (x^n)^{n'} = x^{n.n'} \Rightarrow \exists n'' = n.n' \in \mathbb{N}^* : z = x^{n''}$ 1pt

$\Rightarrow xRz \Rightarrow R$ est ~~anti-sym~~ transitive.

$\Rightarrow R$ est une relation d'ordre.

b/ Soit $A = \{2, 4, 16\}$.

Le plus petit élément est $\underline{2}$ car $\forall x \in \mathbb{N}^*$.

$2 R x$.

En effet : $4 = 2^2 = 4$, $16 = 2^4$. 0,75pts

Le plus grand élément est $\underline{16}$. car $\forall x \in \mathbb{N}^*$

$x R 16$

$\Rightarrow \begin{cases} 16 = 2^4 \Rightarrow 2 R 16 \\ 16 = 4^2 \Rightarrow 4 R 16. \end{cases}$ 0,75pts

Exo3

Soit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ une LCI. définie par :

$$\forall (a,b), (c,d) \in E ; (a,b)*(c,d) = (ac, ad+b)$$

1/ La loi $*$ est non commutative.

$$\begin{cases} (1,2)*(3,4) = (3, 4+2) = (3,6) \\ (3,4)*(1,2) = (3, 6+4) = (3,10). \end{cases} \Rightarrow (1,2)*(3,4) \neq (3,4)*(1,2)$$ 1pt

2/ $(E,*)$ est un groupe.

a) $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in E$:

$$((a,b)*(c,d))*(e,f) = (ac, ad+b)*(e,f) = (ace, acf+ad+b)$$

$$(a,b)*((c,d)*(e,f)) = (a,b)*(ce, cf+d) = (ace, acf+ad+b)$$

$\Rightarrow *$ est associative. 1pt

b/ le neutre. $\exists (e_1, e_2) \in E : \forall (a,b) \in E ; (a,b)*(e_1,e_2) = (e_1,e_2)*(a,b)$
$= (a,b)$.

soit ~~(a,b)~~,

Soit $(a,b) \Rightarrow (a,b)*(e_1,e_2) = (a,b) \Rightarrow$

$$(ae_1, ae_2+b) = (a,b) \Rightarrow \begin{cases} ae_1 = a \Rightarrow e_1 = 1 \\ ae_2+b = b \Rightarrow e_2 = 0 \end{cases}$$ 1pt

$\Rightarrow (1,0)$ est le neutre $\in E$.

Même chose de $(e_1,e_2)*(a,b) = (a,b) \Rightarrow (e_1,e_2) = (1,0)$

0,5pts

c/ Le symétrique : $\forall (a,b) \in E \; \exists (a',b') \in E$:

$$(a,b)*(a',b') = (a',b')*(a,b) = (1,0).$$

$\Rightarrow (a,b) * (a',b') = (1,0)$

$\Rightarrow (aa', ab'+b) = (1,0) \Rightarrow \begin{cases} aa' = 1 \Rightarrow a' = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^* \\ ab'+b = 0 \Rightarrow b' = -\frac{b}{a}, \; a \neq 0. \end{cases}$

$\Rightarrow (a', b') = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$. 1pt

de la même manière on trouve de

$(a', b') * (a,b) = (1,0)$ que $(a', b') = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$.

0,5

finalement $(E, *)$ est un groupe.

Ex04 Le pgcd(A, B) avec $A = X^4 - 2X + 1$, $B = X^2 + X + 1$.

L'algorithme d'euclide est $\begin{cases} R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1} \\ R_0 = A, \; R_1 = B. \end{cases}$ 0,5pts

---

pour $n = 1 \Rightarrow A = B Q_1 + R_2$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 2X + 1 & X^2 + X + 1 \\ \hline -X^4 - X^3 - X^2 & X^2 - X \\ \hline -X^3 - X^2 - 2X + 1 & \\ X^3 + X^2 + X & \\ \hline -X + 1 \rightarrow R_2 & \end{array}$$

0,5pts

Comme $R_2 \neq 0$ on prend $n = 2 \Rightarrow R_1 = R_2 Q_2 + R_3$

$$\begin{array}{r|l} X^2 + X + 1 & -X + 1 \\ \hline -X^2 + X & -X - 2 \\ \hline 2X + 1 & \\ -2X + 2 & \\ \hline 3 \rightarrow R_3 & \end{array}$$

0,5pts

Comme $R_3 = \underline{\underline{cte}} \Rightarrow \text{pgcd}(A, B) = 3$ 0,5pts

et (A et B) sont premiers entre eux. 0,5pts

II Le reste de la division : de $P(X) = (X+1)^n + X^n + 1$ par

$\varphi(X) = X(X+1)$.

$P = \varphi B + R$ avec $\deg R \leq 1 \Rightarrow R(X) = \alpha X + \beta$. 0,5pts

$$\Rightarrow \begin{cases} P(0) = B(0)\varphi(0) + R(0) \Leftrightarrow \boxed{2 = \beta}. & 0{,}5\text{pts} \\ P(-1) = B(-1)\varphi(-1) + R(-1) \Leftrightarrow (-1)^n + 1 = -\alpha + \beta \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1 - (-1)^n}$ 0,5pts.

$\Rightarrow \boxed{R(X) = [1 - (-1)^n] X + 2}$ 1pt