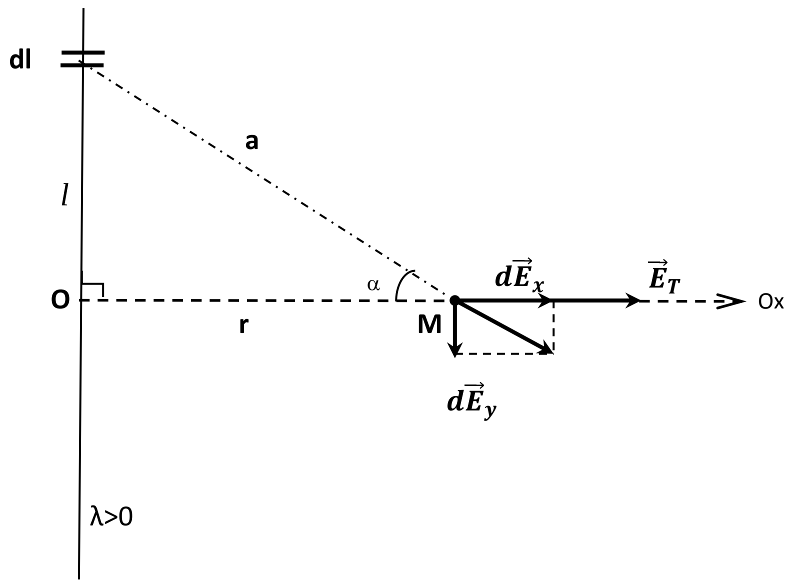
Corrigé TD

(fil indéfini chargé et dipôle)

Exercice 1

La charge **q** uniformément répartie, avec une densité linéique $\lambda > 0$, sur un fil rectiligne indéfini.

1°/ Le champ total $\mathbf{E_T}$ au point M :



On peut dire tout de suite que par raison de symétrie (fil indéfini) le champ résultant $\vec{E}_T$ sera perpendiculaire au fil et de sens tel qu'il s'éloigne du fil car $\lambda > 0$.

Chaque élément de fil de longueur dl créé un champ élémentaire $\mathrm{d}\vec{E}(\mathrm{d}E_x,\mathrm{d}E_y)$ dont seul la composante $\mathrm{d}E_x$ (voir figure) interviendra dans le champ résultant.

En effet la composante $\mathrm{d}E_y$ sera annulée quand on considèrera l'effet d'un autre élément dl' situé symétriquement du premier par rapport à OM.

(Les projections suivant l'axe Oy, dE_y et dE'_y s'annulent entre elles).

Cet élément **dl** porte une charge ***dq =λ.dl*** (la densité $\lambda = dq/dl$) *créé en **M** le champ*

$$d\vec{E}_T = dE_x.\vec{u} = dE\cos\propto \quad \text{avec } \vec{u} : \text{vecteur unitaire}$$

$$d\vec{E}_T = k.\frac{dq}{a^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda.dl}{a^2}\vec{u}$$

donc, en valeur algébrique sur la direction $\overrightarrow{OM}$:

$$dE_T = dE\cos\propto$$

$$dE_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda.dl}{a^2}\cos\alpha\,,$$

d'où la valeur algébrique du champ résultant

$$E_T = \int_{fil}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda.dl}{a^2}\cos\alpha$$

nous avons aussi $\tan\propto = \frac{l}{r} \quad \rightarrow \quad l = r.\tan\propto$

Alors $dl = r.\frac{1}{\cos^2\propto}d\alpha$ *et* $\cos\propto = \frac{r}{a} \quad \rightarrow \quad a = \frac{r}{\cos\propto}$

$$E(M) = \int\frac{\lambda.dl}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cos\propto = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{r}{\cos^2\propto}\frac{\cos^2\propto}{r^2}\cos\propto.d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_{fil}\cos\propto.d\alpha$$

en intégrant de $\alpha = -\pi/2$ à $\alpha = \pi/2$

Ce qui donne après simplification, α *variant entre* $-\pi/2$ *et* $+\pi/2$

$$E_T = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\propto.d\alpha$$

$$\rightarrow \quad E_T = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}.\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}.2$$

D'où

$$\boxed{E_T = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

2°/ Le potentiel total **V** au point M est la somme **scalaire** des potentiels créés par chaque conducteur. Raisonnant tout d'abord dans le plan P perpendiculaire aux deux fils (voir figure ci-dessous).

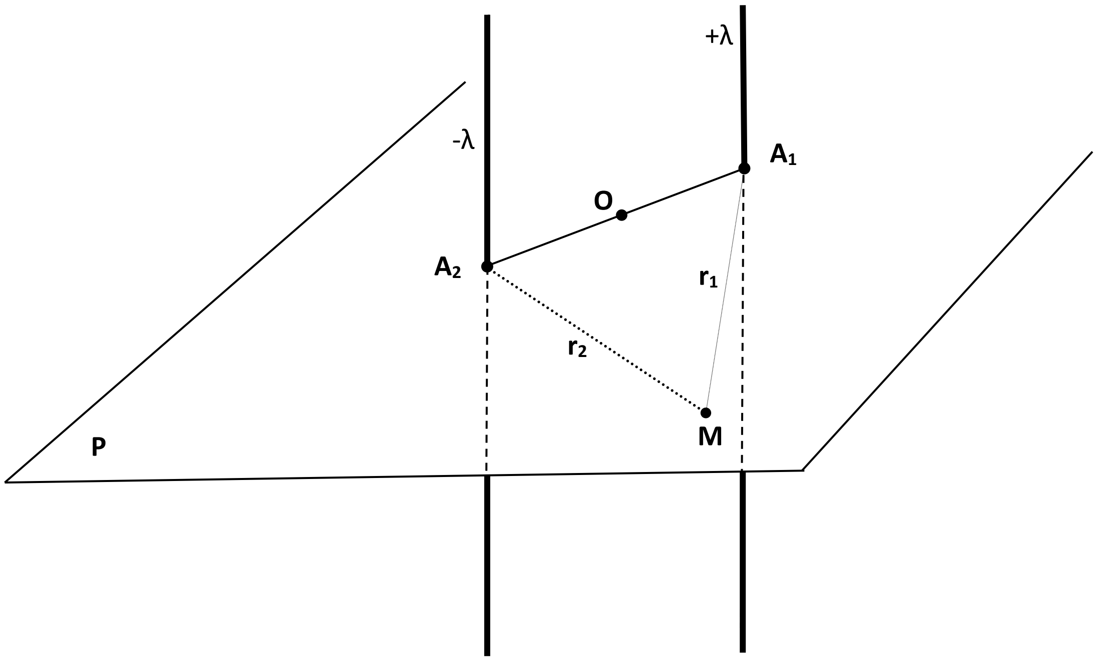
D'après la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

D'où

$$dV = -Edr\ ,$$

Ce qui donne

$$dV = -\frac{1}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\frac{\lambda}{r}dr$$



En appliquant cette expression générale pour des déplacements dr_1 et dr_2 respectivement selon les directions r_1 et r_2

Nous avons le potentiel au point M

$$\mathbf{V_{(M)} = V_1+V_2}$$

V_1 pour le fil portant + λ

V_2 pour le fil portant - λ

$$dV_1 == -\frac{1}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\frac{\lambda}{r_1}dr_1 \;\rightarrow\; V_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\int\frac{dr_1}{r_1}$$

$$\boxed{V_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_1 + k_1}$$

Même chose pour V_2 avec - λ

$$dV_2 == +\frac{1}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\frac{\lambda}{r_2}dr_2 \;\rightarrow\; V_2 = +\frac{\lambda}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\int\frac{dr_2}{r_2}$$

$$\boxed{V_2 = +\frac{\lambda}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\ln r_2 + k_2}$$

$\mathbf{V_{(M)} = V_1+V_2}$ $\quad\longrightarrow\quad V_{M=} -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_1 + k_1 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_2 + k_2$

$$V_{M=}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_2 - \ln r_1) + (k_1 + k_2)$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_M = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + K}}$$

Avec $\quad K = k_1 + k_2$

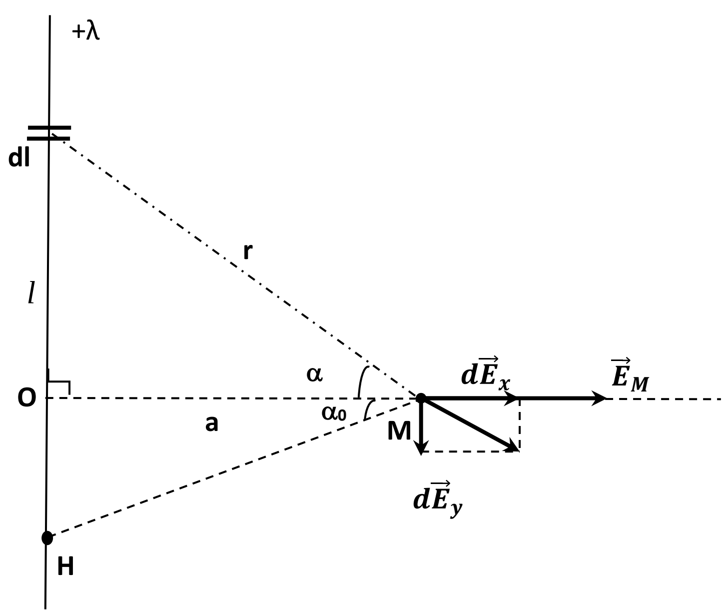
Pour calculer la constante K, on calcule la valeur prise par le potentiel en des points particuliers. Le plus simple est de considérer un point quelconque du plan médiateur de A_1A_2, par exemple le point O milieu de A_1A_2, où le potentiel est nul par raison de symétrie (distributions égales et de signes contraires, distances égales) :

$$\boldsymbol{r_1 = r_2} \qquad \text{et} \quad \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \ln 1 = 0$$

$$V_O = 0 + K \quad\rightarrow\quad K = 0$$

d'où $$\boxed{\boldsymbol{V_{M=}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

Exercice 2



Chaque élément de fil de longueur **dl** créé un champ élémentaire $d\overrightarrow{E}(dE_x, dE_y)$ dont seul la composante dE_x (voir figure) interviendra dans le champ résultant.

la composante dE_y sera annulée quand on considèrera l'effet d'un autre élément dl' situé symétriquement du premier par rapport à OM.

Donc :

$$d\overrightarrow{E_T} = dE_x.\vec{u} = dE\cos\propto \quad \text{avec } \vec{u} : \text{vecteur unitaire}$$

$$d\overrightarrow{E}_M = k.\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda.dl}{r^2}\vec{u}$$

donc, en valeur algébrique sur la direction $\overrightarrow{OM}$:

$$dE_M = dE\cos\propto$$

$$dE_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda.dl}{r^2}\cos\alpha\,,$$

d'où la valeur algébrique du champ résultant

$$|E_M| = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda.dl}{a^2}\cos\alpha$$

Et comme $\tan\propto = \frac{l}{a} \quad \rightarrow \; l = a.\tan\propto$

Alors $dl = a.\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$ *et* $\cos\alpha = \frac{a}{r} \quad \rightarrow \quad r = \frac{a}{\cos\alpha}$

$$E(M) = \int \frac{\lambda.dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\propto = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{a}{\cos^2\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{a^2}\cos\propto.d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\int \cos\propto.d\alpha$$

En intégrant de $\alpha = -\alpha_0$ à $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$E(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\int_{-\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha.d\alpha$$

$$\rightarrow \quad E_M = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\alpha_0)\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(1 + \sin\alpha_0)$$

$$\boxed{E_M = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(1 + \sin\alpha_0)}$$

2°/

- Si $\alpha_0 = 0 \quad \rightarrow \quad sin\alpha_0 = 0$

$$\boxed{\boldsymbol{E_M} = \frac{\lambda}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 r}}}$$

- Si $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad sin\alpha_0 = 1$

$$\boldsymbol{E_M} = \frac{\lambda}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 r}}\left(1 + sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 r}}(1+1) = \frac{\lambda}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 r}}.2 = \frac{\lambda}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 r}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E_M} = \frac{\lambda}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 r}}}$$

Exercice 3