Chapitre III

Travail et Energie

I. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement à la forme mécanique de l'énergie, si cette dernière reste constante (ne change pas de forme) nous dirons qu'elle est conservée, mais si elle se transforme (en énergie thermique par exemple) nous dirons qu'elle est non conservée.

II. TRAVAIL ET PUISSANCE

Nous avons l'habitude de définir le travail d'une force (parallèle au déplacement) lors d'un déplacement rectiligne d'un point matériel par le produit de la force au déplacement *AB*.

$$W_B^A = \pm F.AB$$

Cette valeur est positive si la force est dans le sens du déplacement (force motrice).

- Elle est négative si la force est dans le sens opposé au déplacement (force résistante au déplacement).

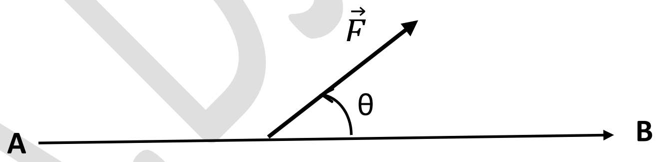
Le travail d'une force perpendiculaire au déplacement étant nul.

Plus généralement, lors d'un déplacement rectiligne, le travail est donné par :

$$W_B^A = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.\cos\theta$$

Ce travail est positif (travail moteur) si $\cos\theta > 0 \rightarrow 0 \leq \theta < \pi/2$.

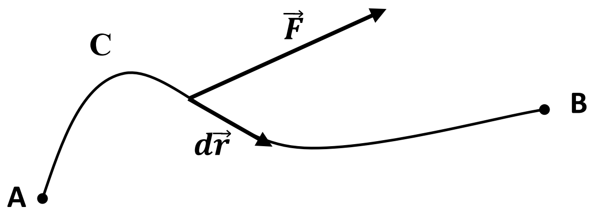
- Il est négatif (travail résistant) si $\cos\theta < 0 \rightarrow \pi/2 < \theta \leq \pi$.
- Et il est nul si $\cos\theta = 0 \rightarrow \theta = \pi/2$.



Considérons une particule A se déplaçant le long d'une courbe C sous l'action d'une force $\vec{F}$, pendant un temps très court dt, elle va de A à B le déplacement étant AB = dr.

Lors du déplacement d'une masse ponctuelle *m* d'un point *A* vers un point *B* de l'espace, suivant une courbe quelconque *C*. Le travail s'obtient en divisant la courbe en déplacements élémentaires $d\vec{r}$, pouvant être considérés comme rectilignes. Dans ce cas, le travail le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ pendant le déplacement est défini par le produit scalaire :

$$d\overrightarrow{W} = \vec{F}.d\vec{r}$$



Le travail d'une force (ou de la résultante des forces) lors du déplacement AB est alors calculé à partir de l'intégrale :

$$W_B^A = \int_B^A dW = \int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

$d\vec{l}$ est un déplacement élémentaire suivant la courbe C.

Cette intégrale est appelée « *circulation du champ de force* $\vec{F}$ *sur la courbe C* ».

Remarque :

La force $\vec{F}$ peut être décomposée en deux vecteurs : $\vec{F}_{\parallel}$ parallèle au déplacement $d\vec{r}$ et $\vec{F}_{\perp}$ perpendiculaire au déplacement $d\vec{r}$.

$$\boldsymbol{W_B^A = \int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}).d\vec{r}}$$

Comme $\vec{F}_{\perp}.d\vec{r} = 0$, alors

$$\boxed{\boldsymbol{W_B^A = \int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C \vec{F}_{\parallel}.d\vec{r}}}$$

D'où seule la composante de la force parallèle au déplacement **($\vec{F}_{\parallel}$)**, fournit un travail, le travail de la force perpendiculaire au déplacement étant nul.

III. Puissance :

Dans certaines applications pratiques, concernant en particulier les machines, il est important de connaitre la vitesse avec laquelle le travail fait : la puissance instantanée est définie par:

$$\boxed{\boldsymbol{P = P_{inst.} = \frac{dW}{dt}}}$$

La puissance peut être aussi écrite par la relation :

$$\boxed{\boldsymbol{P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}}}$$

Avec

$$\boldsymbol{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}}$$

$\vec{v}$: Vitesse

La puissance peut être ainsi définie comme le produit de la force par la vitesse

Unités :

Dans le système [MKSA] :

- L'unité du travail est le Joule (1 Joule = 1 N.m)

Autres unités : Calorie (1 Cal = 4,1855 Joule)

Watt–heure (1 Wh = 3600 Joule)

KiloWatt–heure (1 kWh = 3,6 106 Joule)

- L'unité de la puissance est le Watt (1 Watt = 1 Joule/s)

Autres unités : Cheval–vapeur (1 Cv = 736 Watt).

IV. ÉNERGIE CINÉTIQUE

Calculons le travail de la résultante des forces $\boldsymbol{\vec{F}}$ appliquée à un point matériel de masse *m* entre deux points A et B.

$$\boldsymbol{W_B^A = \int_A^B \vec{F}\,.d\vec{r},}$$

Or d'après le principe fondamental de la dynamique nous avons :

$$\boldsymbol{\vec{F} = m.\vec{\gamma} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boldsymbol{W_B^A = \int_A^B \vec{F}\,.d\vec{r} = m.\vec{\gamma}.d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.d\vec{r}}$$

Or

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

$$W_B^A = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B m d\vec{v}.\vec{v}$$

Puisque le déplacement est assez petit pour le considérer comme étant rectiligne, donc les vecteurs sont parallèles. Le travail devient alors :

$$W_B^A = m\int_A^B v.dv = \frac{1}{2}m.v^2\Big|_A^B$$

$$W_B^A = \frac{1}{2}m.v^2\Big|_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

La valeur $\frac{1}{2}m.v^2 = E_c$ est appelée Energie cinétique du point matériel.

v_A **:** vitesse en A

v_B : Vitesse en B

Et l'énoncé du ***théorème de l'énergie cinétique*** : « Le travail de la résultante des forces appliquées à un point matériel entre deux point est égal à la variation de l'énergie cinétique du point matériel »

$$\boxed{W_B^A = \Delta Ec = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2}$$

Alors le travail effectué sur une particule de masse m est égal à la variation de son énergie cinétique.

V. ÉNERGIE POTENTIELLE

V.1. Fonction Potentielle.

Supposons qu'il existe une fonction U tel que :

$$\vec{F} = -\nabla.U = -\overrightarrow{grad}U$$

∇ **(Nabla) :** est un opérateur vectoriel est égal :

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial x}$$

Le travail effectué en déplaçant le point matériel le long de la courbe Cde A à B est donnée par la relation :

$$W_B^A = \int_A^B \vec{F}\,.\,d\vec{r} = U(A) - U(B)$$

U : est appelée énergie potentielle.

En effet,

$$W_B^A = \int_A^B \vec{F}\,.\,d\vec{r} = \int_A^B -\nabla.U\,.\,d\vec{r}$$

$$-\nabla.U = -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)U = -\left(\vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

$$-\left(\vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -dU$$

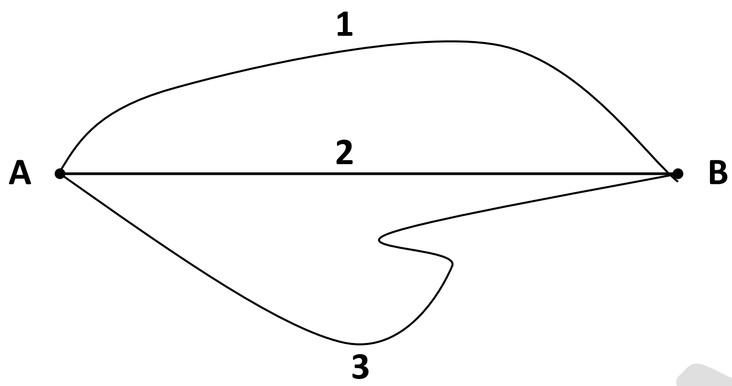
dU **:** C'est la différentielle totale de la fonction **U**

Donc

$$W_B^A = \int_A^B \vec{F}\,.\,d\vec{r} = \int_A^B -\nabla.U\,.\,d\vec{r} = -\int_A^B d.U = -U|_A^B$$

$$\boxed{W_B^A = U(A) - U(B)}$$

Dans ce cas, le travail est indépendant du chemin suivi. Quand le travail effectué par un champ de force pour déplacer un point matériel d'un point à un autre est indépendant du chemin suivi on dit que la force dérive d'un potentiel, exemple ***la force de la pesanteur***.



$$W_{AB}^{1} = W_{AB}^{2} = W_{AB}^{3}$$

Si la trajectoire est fermée (boucle) de sorte que A coïncide avec B, alors

$\boldsymbol{U(A) = U(B)}$, le travail est nul.

$$\oint_A^B \vec{F}.d\vec{r} = 0$$

V. 2. Énergie potentielle

La fonction scalaire est appelée énergie potentielle, il convient de remarquer que l'énergie potentielle est définie

$$W_B^A = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = -\int_A^B d.U$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{U = -\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}}$$

Avec

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

VI. CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

Quand la force agissant sur une particule (point matériel dérive d'un potentiel :

$$\left.\begin{aligned} W_B^A &= U(A) - U(B) \\ W_B^A &= E_{cB} - E_{cA} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{E_{cB} - E_{cA} = U(A) - U(B)}$$

$$E_{cB} + U(B) = E_{cA} + U(A)$$

La quantité $E_c + U$ est appelée Energie totale de la particule qu'on désigne par E

Autrement dit, l'énergie totale d'une particule est égale à la somme des énergies.

$$\boxed{E = E_c + U}$$