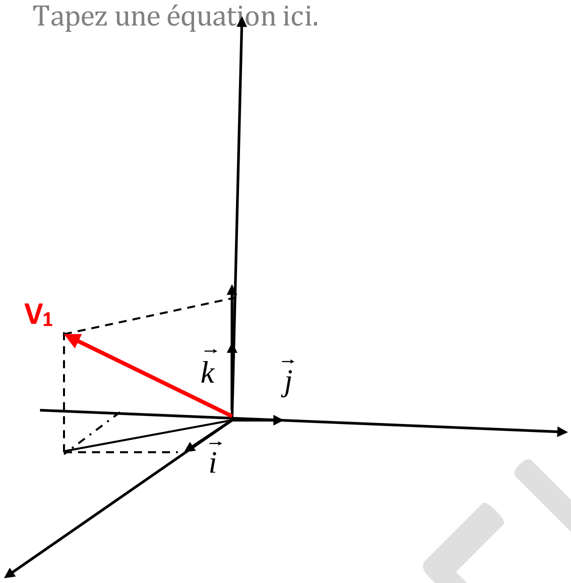
## Solution TD2 sur les vecteurs

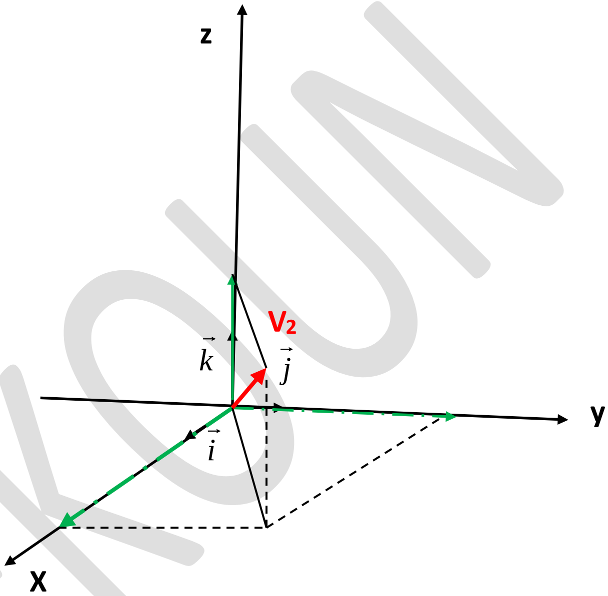
### Exercice 1 :

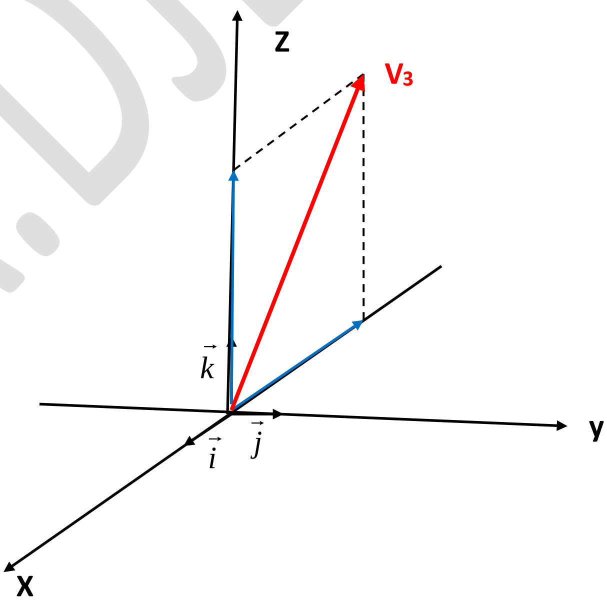
a/ $\vec{V}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ , $\vec{V}_2 = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{V}_3 = -3\vec{i} + 4\vec{k}$

Représentation des 3 vecteurs dans un repère orthonormé

Tapez une équation ici.






**b/** Les composantes du vecteur : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (1 + 4 - 3)\vec{\imath} + (-2 + 4 + 0)\vec{\jmath} + (2 - 2 + 4)\vec{k}$

$$\boldsymbol{\vec{V} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}}$$

c/ On peut écrire le vecteur $\vec{V}$ sous la forme $\vec{V} = |V|.\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|V|} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{24}}$$

d/ $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 1.4 + (-2.4) + 2.4 = 4$

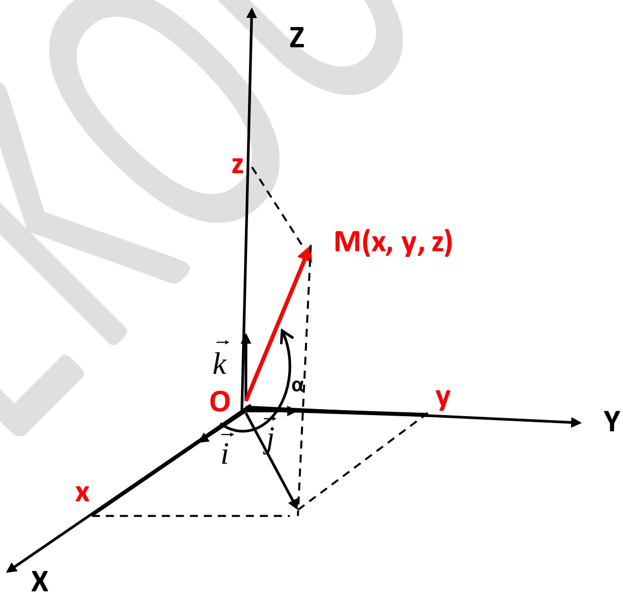
$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ = (-2x-2)-(4x2) $\vec{i}$ -(1x-2)-(4x2) $\vec{j}$ +(1x4)-(4x-2) $\vec{k}$ = -4$\vec{i}$ +10$\vec{j}$ +12$\vec{k}$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -4\vec{i} + 10\vec{j} + 12\vec{k}$$

**Exercice 2 :**

1°/ Expression du vecteur $\vec{r}$

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$




2°/ Le module de $\vec{r}$ est :

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**Avec x=1, y = 2, z =3.**

$|\vec{r}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$

$|\vec{r}| = \sqrt{14}$

3°/ Calcul de l'angle α compris entre :

$\vec{i}$ et $\vec{r}$

On applique le produit scalaire

$\vec{i}\,.\,\vec{r} = |\vec{i}\,|.\,|\vec{r}|.\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{i}\,.\vec{r}}{|\vec{i}\,|.|\vec{r}|}$$

Avec les composantes de $i(1,0,0)\,et\,r(1,2,3)$

Alors

$$\cos\alpha = \frac{\vec{i}\,.\vec{r}}{|\vec{i}\,|.|\vec{r}|} = \frac{1.1 + 0.2 + 0.3}{\sqrt{1}.\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

**α=74,5°**

**Exercice 3**

1°/ Soit les vecteurs $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{r}_3 = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

1/Calcule de $\vec{r}_1 . \vec{r}_2$ et $\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2$

$\vec{r}_1 . \vec{r}_2$ = 2x1+3x-1+1x2 = 1

$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$=(3x2)-(-1x1) $\vec{i}$ -(2x2)-(1x1) $\vec{j}$ +(2x-1)-(1x3) $\vec{k}$ $= \mathbf{7\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}}$

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \mathbf{7\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}}$$

2°/ le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par $\vec{V}_1 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$

$$\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2+1-1})\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{3-1+1})\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (\mathbf{1+2-1})\vec{\boldsymbol{k}} = \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{k}}$$

On peut écrire le vecteur $\vec{V}_1$ sous la forme $\vec{V}_1 = |\vec{V}_1|.\vec{u}$

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{1}}}{|\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{1}}|} = \frac{\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{\mathbf{17}}}$$

**Exercice 4 :**

Soit le vecteur $\vec{v}$=cos$\theta$ $\vec{i}$ +sin$\theta$ $\vec{j}$ ,$\theta = \omega$ t ; $\omega$ est une constante du temps et t le temps.

**1**°/ Module de $|\vec{\boldsymbol{V}}| = \sqrt{\boldsymbol{cos^2\theta + sin^2\theta}} = \mathbf{1}$

**2**°/ $\vec{V}_1 = \frac{d\vec{V}}{dt} = -wsin\theta\vec{\imath} + wcos\theta\vec{\jmath}$

$\vec{V}_2 = \dfrac{d\vec{V}}{d\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$

Module de $|\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{2}}| = \sqrt{\boldsymbol{sin^2\theta + cos^2\theta}} = \mathbf{1}$

**3**°/ $\vec{V}_1 = \frac{d\vec{V}}{dt} = -wsin\theta\vec{\imath} + wcos\theta\vec{\jmath} = w(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}) = w.\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{2}}$

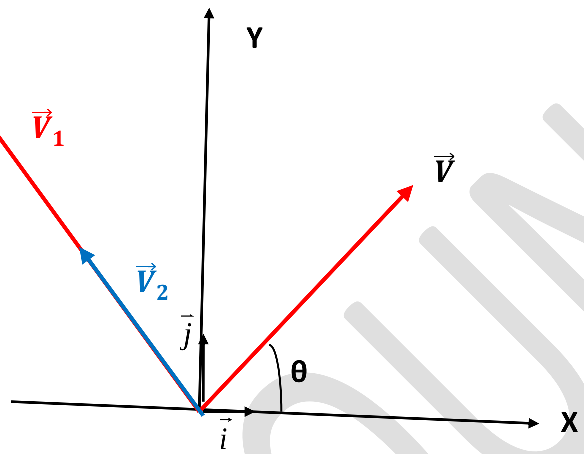
$$\vec{V}_1 = w.\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{2}}$$

$\rightarrow \vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$ *sont colinéaires*

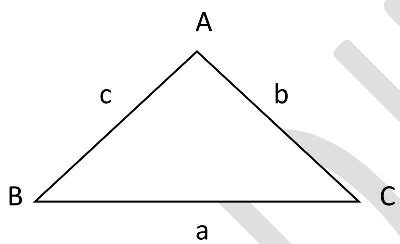
Pour montrer que $\vec{V}_1 \perp \vec{V}$ , on vérifie si $\vec{V}_2.\vec{V} = 0$ ?

$$\vec{V}_1.\vec{\boldsymbol{V}} = -sin\theta.cos\theta + cos\theta.sin\theta = 0$$

$$\vec{V}_1.\vec{\boldsymbol{V}} = 0 \rightarrow \vec{V}_1 \perp \vec{\boldsymbol{V}}$$




**Exercice 5 :**




On peut mettre b = a+c

$\rightarrow$ a = b – c $\rightarrow$ $a^2 = (b\text{-}c)^2$ $\rightarrow$ $a^2 = b^2+c^2\text{-}2\vec{b}.\vec{c}$

$\rightarrow$ $\boxed{a^2 = b^2+c^2\text{-}2|\vec{b}|.|\vec{c}|\cos\hat{A}}$

$\rightarrow$ $\vec{b} = \vec{a}+\vec{c}$ $\rightarrow$ $\vec{b}\wedge\vec{c} = \overrightarrow{(a+c)}\,{}_{\wedge}\vec{c}$ = $\vec{b}\wedge\vec{c} = \overrightarrow{(a\wedge c)}+\overrightarrow{(c\wedge c)}$

$$\vec{b}\wedge\vec{c} = \overrightarrow{(a\wedge c)}+\overrightarrow{(c\wedge c)}$$

$$\overrightarrow{(c\wedge c)} = 0$$

$\vec{b}\wedge\vec{c} = \overrightarrow{(a\wedge c)}$ $\rightarrow$ b.c $\sin\hat{A} = ac\sin\hat{B}$ $\rightarrow$ b $\sin\hat{A} = a\sin\hat{B}$

d'où

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

Aussi $\vec{b} \wedge \vec{a} = (\overrightarrow{a \wedge c}) \wedge \vec{a}$ $\quad \vec{b} \wedge \vec{a} = (\overrightarrow{a \wedge a}) + (\overrightarrow{c \wedge a})$

$$(\overrightarrow{a \wedge a}) = 0$$

$$\vec{b} \wedge \vec{a} = (\overrightarrow{c \wedge a}) \rightarrow \text{b.a} \sin \hat{C} = ca \sin \hat{B} \quad \rightarrow \text{b} \sin \hat{C} = c \sin \hat{B}$$

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \\ \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \end{array}\right\} \quad \boxed{\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}}$$