Le produit vectoriel :

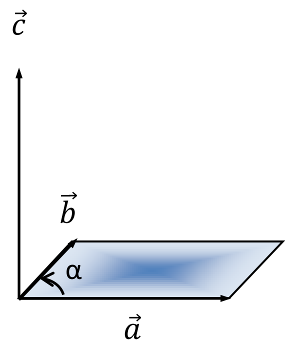
Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est un vecteur $\vec{c}$, noté:

$$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}}$$

Dont :

- la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$
- Le sens est donné par la règle du tire-bouchon ou tournevis par la main droite
- Le module correspond à l'aire du parallélogramme formé entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et est égale :

$$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\sin\alpha$$



Forme analytique :

Si l'on connait les composantes des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans une base orthonormée directe

avec $\vec{a} = x_1\vec{i} - y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{b} = x_2\vec{i} - y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \qquad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{i}(y_1z_2 - y_2z_1) - \vec{j}(x_1z_2 - x_2z_1) + \vec{j}(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Si on intervertit les vecteurs, Il est facile de constater que les vecteurs produisent un vecteur opposé

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$$

Le produit vectoriel permet de savoir si deux vecteurs sont colinéaires:

$$Si \quad \vec{a} || \vec{b} \ \leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = 0$$

Produit mixte :

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ *et* $\vec{c}$ une quantité scalaire m dont la valeur absolue est égale au volume du parallélépipède construit par les trois vecteurs :

$$\boxed{\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} \wedge \vec{b})}$$

Double produit vectoriel :

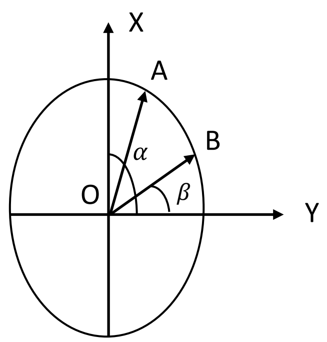
$$\boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})}$$

Applications :

-Produit scalaire

Nous utilisons le produit scalaire, par exemple, pour le calcul de $\cos(\alpha\text{-}\beta)$.

Prenons 2 vecteurs unitaires $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$



D'après la relation $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|\cos(\alpha\text{-}\beta)$.

$(\alpha\text{-}\beta)$ est l'angle compris entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$

D'où $$\cos(\alpha\text{-}\beta) = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|}$$

Avec $\overrightarrow{OA} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{OB} = \cos\beta\,\vec{i} + \sin\beta\,\vec{j}$

Donc

$$\boxed{\cos(\alpha\text{-}\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

Dans un triangle quelconque ABC de côté a, b, c avec :

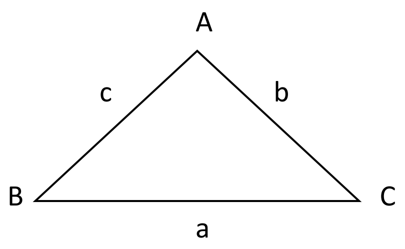
CB = a, BA = c et CA = b

Montrer que :

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\hat{A}$$

et aussi

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$



On peut mettre b = a+c

$$\rightarrow\ a = b - c \rightarrow a^2 = (b\text{-}c)^2 \rightarrow a^2 = b^2+c^2-2\vec{b}.\vec{c}$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{a^2 = b^2+c^2-2|\vec{b}|.|\vec{c}|\cos\hat{A}}$$

$$\rightarrow \qquad \vec{b} = \vec{a}+\vec{c} \rightarrow \vec{b}\wedge\vec{c} = (\overrightarrow{a+c})\wedge\vec{c} = \vec{b}\wedge\vec{c} = (\overrightarrow{a\wedge c}) + (\overrightarrow{c\wedge c})$$

$$\vec{b}\wedge\vec{c} = (\overrightarrow{a\wedge c}) + (\overrightarrow{c\wedge c})$$

$$(\overrightarrow{c\wedge c}) = 0$$

$$\vec{b}\wedge\vec{c} = (\overrightarrow{a\wedge c}) \rightarrow \text{b.c}\sin\hat{A} = ac\sin\hat{B} \rightarrow \text{b}\sin\hat{A} = a\sin\hat{B}$$

d'où

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

Aussi $\vec{b} \wedge \vec{a} = \overrightarrow{(a \wedge c)} \wedge \vec{a}$ $\vec{b} \wedge \vec{a} = \overrightarrow{(a \wedge a)} + \overrightarrow{(c \wedge a)}$

$$\overrightarrow{(a \wedge a)} = 0$$

$$\vec{b} \wedge \vec{a} = \overrightarrow{(c \wedge a)} \rightarrow \text{b.a} \sin \hat{C} = ca \sin \hat{B} \quad \rightarrow \text{b} \sin \hat{C} = c \sin \hat{B}$$

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} \\ \dfrac{c}{\sin \hat{C}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} \end{array}\right\} \quad \boxed{\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}}$$