Notions de logique mathématique-Ensembles et application

Exercice 1 Parmi les expressions suivantes lesquelles sont des propositions? Dans le cas d'une proposition dire si elle est vraie ou fausse.

a) $6 < \frac{25}{4}$,

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geqslant n$,

c) $n \in \mathbb{N}$,

d) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2$

e) $\forall x \in \mathbb{N},\ x + 2 = 4$

Exercice 2 **I-** Soient P et Q deux propositions, montrer les équivalences suivantes :

1. $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$
2. $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ (supplémentaire).
3. $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

II- • Donner la négation des propositions suivantes :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$

b) $0 \leqslant x \leqslant 1$

c) $x = 0 \vee (x^2 = 1 \wedge x \geqslant 0)$

d) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = 0 \vee x \in]2, 4])$.

e) $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par $8 \Longrightarrow n$ est pair.

- Donner la contraposée de la proposition (e).
- Montrer par contraposée la proposition (e).

Exercice 3 En utilisant le raisonnement mathématique, montrer

1. par la méthode directe : pour tout $x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leqslant x^2 - x - 1$.
2. par l'absurde : $\forall a, b \in \mathbb{Q}, x + y\sqrt{2} = 1 \Longleftrightarrow (x = 1\ et\ y = 0)$.(On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel(série 1 d'analyse))
3. par récurrence : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \forall n \in \mathbb{N},\ (1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 4 On considère les ensembles suivants : $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{\{1, 2\}, 5\}$, $C = \{\{1, 2, 5\}\}$, $D = \{0, 1, 2, 5\}$, $E = \{5, 1, 2\}$, $F = \{\{1, 2\}, \{5\}\}$, $G = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\}$, $H = \{5, \{1\}, \{2\}\}$.

a) Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion qui existent entre ces ensembles ?

b) Déterminer $A \cap B$, $E \cup G$ et $A \backslash C$.

c) Quel est le complémentaire de A dans D et $A \Delta D$.

d) Trouver l'ensemble des parties de l'ensemble B.

e) Les notations $\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}$ désignent-elles le même ensemble ?

Exercice 5 • Soit E un ensemble, A, B, C, D des sous ensembles de E, montrer que :

1. $A \subset B \cap C \Leftrightarrow A \subset B$ et $A \subset C$
2. $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$
3. $\overline{(A \triangle B)} = (A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)}$
4. $(\overline{A} \triangle \overline{B}) = A \triangle B$
5. $A \subset C$ et $B \subset D \Rightarrow (A \times B) \subset (C \times D)$

• Simplifier les expressions suivantes :

1. $F = A \cup \overline{(\overline{B} \cup \overline{A})}$
2. $G = \overline{A} \cap \overline{(\overline{A} \cap B)}$

Exercice 6 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/(1+x^2)$, $A = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$, $B = [-1, 0]$.

1. Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
2. f est-elle injective ? surjective ?(Justifier)

Exercice 7 (Supplémentaire) Soit l'application $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :$f(n, m) = nm$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ définie par :$g(n) = (n, (n^2 + 1)$

1. Déterminer $f(\{(2, 1), (1, 2)\})$ et $g^{-1}(\{(1, 1)\})$.
2. Les applications f et g sont elles injectives ? Surjectives ?

Exercice 8 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Montrer que :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f$ *injective* $\Longleftrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ (supplémentaire)
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
5. $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(F \backslash A) \subset E \backslash f^{-1}(A)$
6. $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$ (supplémentaire).

Exercice 9 Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Montrer que pour toute partie A et B de E, on a

1. Si f est injective alors $A = (f^{-1} \circ f)(A)$.
2. Si f est surjective alors $(f \circ f^{-1})(B) = B$.

Exercice 10 (Supplémentaire) On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D$. Montrer que :

1. $(g \circ f)$ injective $\Longrightarrow f$ injective
2. $(g \circ f)$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective

Notions de logique mathématique-Ensembles et application

Correction 1 **a)** $6 > \frac{25}{4}$, est une proposition fausse,

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geqslant n$, est une proposition vraie,

c) $n \in \mathbb{N}$, n'est pas une proposition (car n est inconnu on ne peut pas décidé s'il est un entier naturel ou non),

d) $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 2$ est une proposition vraie,

e) $\forall x \in \mathbb{N}$, $x + 2 = 4$ est une proposition fausse.

Correction 2 On utilise la table de vérité pour montrer les équivalences suivantes :

1. $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$

P	Q	$\overline{P}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{P} \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

2. $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$	$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

3. $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Longrightarrow R$	$P \Longrightarrow R$	$Q \Longrightarrow R$	$(P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)$	(3)
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

La proposition est vraie dans tous les cas, c'est à dire elle est démontré par sa table de vériré.

a) La négation de $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$ est $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$

b) La négation de $0 \leqslant x \leqslant 1$ est $(x < 0) \vee (x > 1)$

c) La négation de $x = 0 \vee (x^2 = 1 \wedge x \geqslant 0)$ est $x \neq 0 \wedge (x^2 \neq 1 \vee x < 0)$

d) La négation de$\forall x \in \mathbb{R}, (x = 0 \vee x \in]2, 4])$ est $\exists x \in \mathbb{R}, (x \neq 0 \wedge x \in]-\infty, 2] \cup]4, +\infty])$.

e) La négation de (n^2-1) n'est pas divisible par $8 \Longrightarrow n$ est pair, en utilisant l'équivalence $(I-1)$

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$$

on peut écrire (e) comme suit

$$((n^2-1)\ est\ divisible\ par\ 8) \vee n\ est\ pair$$

sa négation est

$$((n^2-1) n'estpasdivisiblepar 8) \vee n\ est\ impair$$

La contraposée de (n^2-1) **n'est pas divisible par** $8 \Longrightarrow n$ **est pair,**

Comme la contrapsée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ alors la contraposée de la porosition demandée est

$$nest\ impair, \Rightarrow (n^2-1)\ est\ divisible\ par\ 8$$

Démonstration par contraposée
Montrons que sa contraposée est vraie.

$$\begin{array}{rcl} Soit\ n\ impair\ alors & \Longrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ n = 2k+1 \\ & = & n^2 = 4k^2+4k+1 \\ & = & n^2-1 = 4k^2+4k \\ & = & 4k(k+1) \end{array}$$

il suffit de montrer que $k(k+1)$ est pair.
Montrons que $k(k+1)$ est pair on a deux cas :

1. Si k est pair alors $k+1$ est impair donc le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair voir.
2. Si k est impair, alors $k+1$ est pair donc le produit est pair c'est le même raisonnement, (il faut savoir que le produit de deux nombre consécutifs est toujours pair).

Ainsi $k(k+1)$ est pair $\exists k' \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ k(k+1) = 2k'$, d'où $n^2-1 = 4(2k') = 8k' \Longrightarrow n^2-1$ est divisible par 8.

Correction 3 1. par la méthode directe : pour tout $x \in \mathbb{R}, |x-1| \leqslant x^2-x-1$. on distingue deux cas :

Premier cas- Si $x \leqslant 1 \Longrightarrow x-1 \leqslant 0 \Longrightarrow |x-1| = 1-x$ d'où

$$x^2-x+1-|x-1| = x^2-x+1-(1-x) = x^2-x+1-1+x = x^2 \geqslant 0$$

alors

$$x^2-x+1-|x-1| \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2-x+1 \geqslant |x-1|$$

Deuxième cas- Si $x \geqslant 1 \Longrightarrow x-1 \geqslant 0 \Longrightarrow |x-1| = x-1$ d'où

$$x^2-x+1-|x-1| = x^2-x+1-(x-1) = x^2-x+1-x+1 = x^2-2x+2 = (x-1)^2+1 \geqslant 0$$

alors

$$x^2-x+1-|x-1| \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2-x+1 \geqslant |x-1|$$

2. par l'absurde : $\forall a,b \in \mathbb{Q}, x+y\sqrt{2}=1 \Longleftrightarrow (x=1 \; et \; y=0)$.(On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel(série 1 d'analyse))
   Dans un premier temps montrons que $\forall a,b \in \mathbb{Q}, x+y\sqrt{2}=1 \Longrightarrow (x=1 \; et \; y=0)$. En utilisant le raisonnement par l'absurde, supposons que
   $$x+y\sqrt{2}=1 \; et \; (x\neq 1 \; ou \; y\neq 0)$$
   De l'hypothése $y\neq 0$, $x+y\sqrt{2}=1 \Longrightarrow \sqrt{2}=\frac{1-x}{y}$
   puisque $x,y\in\mathbb{Q}$, il est clair que $\frac{1-x}{y}\in\mathbb{Q}$ d'où $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ ce qui est absurde. Nous avons ainsi établi que $y=0$.Il s'en suit, en remplaçant $y=0$ dans $x+y\sqrt{2}=1$ on trouve directement $x=1$ et ce qui termine la démonstration de l'implication.
   On démontre maintenant la réciproque $(x=1 \; et \; y=0) \Longrightarrow x+y\sqrt{2}=1$, cette implication est immédiate si $(x=1 \; et \; y=0)$ alors en remplaçant $1+0\sqrt{2}=1$. L'équivalence est démontrée.
3. par récurrence : $P(n) : \forall x\in\mathbb{R}^{*+}, \forall n\in\mathbb{N}, \; (1+x)^n \geqslant 1+nx$.
   a) Pour $n=0$, $(1+x)^0 \geqslant 1+0x \Longleftrightarrow 1\geqslant 1$, P(0) est vraie
   b) On suppose que $P(n)$ est vraie
   c) On démontre $P(n+1) : \forall x\in\mathbb{R}^{*+}, \forall n\in\mathbb{N}, \; (1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$.
   $$\begin{array}{rcl} (1+x)^n & \geqslant & 1+nx \\ (1+x)^{n+1} & \geqslant & (1+x)(1+nx) \\ (1+x)^{n+1} & \geqslant & 1+x+nx+nx^2 \\ (1+x)^{n+1} & \geqslant & 1+(1+n)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x \end{array}$$
   d'ù $P(n+1)$ est vraie et par récurrence $P(n)$ est vraie.

Correction 4 évident

Correction 5 • 1. $A\subset B\cap C \Leftrightarrow A\subset B$ et $A\subset C$ On doit démonterer la double implication
- $\Longrightarrow$ Soit $x\in A \Longrightarrow x\in B\cap C \Longrightarrow x\in B et x\in C$ d'où $A\subset B$ et $A\subset C$.
- $\Longleftarrow$ Soit $x\in A \Longrightarrow x\in B$(car $A\subset B$) et $x\in A \Longrightarrow x\in C$(car $A\subset C$) alors $x\in B\cap C$ d'où $A\subset B\cap C$

2. $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\cup C)$
   - **Première méthode** on procède par égalité

   $$\begin{array}{rcl} (A\backslash B)\backslash C & = & (A\cap\overline{B})\cap\overline{C} \\ & = & A\cap(\overline{B}\cap\overline{C}) \\ & = & A\cap(\overline{B\cup C}) \\ & = & A\backslash(B\cup C). \end{array}$$

   - **Deuxième méthode** on raisonne par équivalence

   $$\begin{array}{rcl} x\in(A\backslash B)\backslash C & \Longleftrightarrow & (x\in A \; et \; x\notin B) \; et \; x\notin C \\ & \Longleftrightarrow & x\in A \; et \; x\notin B\cup C \\ & \Longleftrightarrow & x\in A\backslash(B\cup C). \end{array}$$

   D'où l'égalité.

3. $\overline{(A \triangle B)} =^? (A\cap B) \cup \overline{(A\cup B)}$

$$\begin{aligned}
\overline{(A \triangle B)} &= \overline{((A\cup B)\backslash(A\cap B))}\\
&= \overline{((A\cup B)\cap \overline{(A\cap B)})}\\
&= (\overline{(A\cup B)} \cup (A\cap B))\\
&= (A\cap B)\cup \overline{(A\cup B)}
\end{aligned}$$

4. $(\overline{A} \triangle \overline{B}) =^? A\triangle B$

$$\begin{aligned}
\overline{A} \triangle \overline{B} &= (\overline{A}\backslash \overline{B}) \cup (\overline{B}\backslash\overline{A})\\
&= (\overline{A}\cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{B}\cap \overline{\overline{A}})\\
&= (\overline{A}\cap B) \cup (\overline{B}\cap A)\\
&= (A\cap \overline{B}) \cup (B\cap \overline{A})\\
&= (A\backslash B) \cup (B\backslash A)\\
&= A\triangle B
\end{aligned}$$

5. $A\subset C$ et $B\subset D \Longrightarrow^? (A\times B)\subset (C\times D)$

$$\begin{aligned}
Soit\ x\in A\times B &\Longrightarrow \exists x_1\in A\ et\ \exists x_2 \in B\ tel\ que\ x=(x_1,x_2)\\
&\Longrightarrow x_1\in C(\ car\ A\subset C)\ et\ x_2\in D(\ car\ B\subset D)\\
&\Longrightarrow x=(x_1,x_2)\in C\times D
\end{aligned}$$

d'où l'inclusion et ainsi l'implication est démontrée.

⋆ 1. $F = A\cup \overline{(\overline{B}\cup\overline{A})} = A\cup (B\cap A) = (A\cup B)\cap(A\cup A) = (A\cup B)\cap A = A$

2. $G = \overline{A}\cap \overline{(\overline{A}\cap B)} = \overline{A}\cap (A\cup \overline{B}) = (\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}) = \phi\cup(\overline{A\cup B}) = (\overline{A\cup B})$

Correction 6 Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)}$, $A=\{0,\frac{1}{2},1,2\}$, $B=[-1,0]$.

1. $f(A)=\{f(x),\ x\in A\} = \{f(0), f(\frac{1}{2}), f(1), f(2)\} = \{0,\frac{2}{5},\frac{1}{2}\}$
   $f^{-1}(B) = f^{-1}([-1,0]) = \{x\in\mathbb{R},\ f(x)\in[-1,0]\}$ $1\leqslant f(x)\leqslant 0 \Longleftrightarrow 1\leqslant \frac{x}{(1+x^2)}\leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{(1+x^2)}\geqslant -1\ et\ \frac{x}{(1+x^2)}\leqslant 0$

$$\frac{x}{(1+x^2)}\leqslant 0\ si\ x\leqslant 0\ (\forall x\in\mathbb{R}, 1+x^2\geqslant 0),\ d'x\in]-\infty,0]$$

$$\frac{x}{(1+x^2)}\geqslant -1 \Longleftrightarrow \frac{x^2+x+1}{(1+x^2)}\geqslant 0 \Longrightarrow x\in]-\infty,+\infty[$$

   alors $f^{-1}(B)=]-\infty,0]$.

2. **L'injectivité de** f :
   contre exemple : on remarque d'aprés la question précédente que $f(\frac{1}{2})=f(2)=\frac{2}{5}$ une image $\frac{2}{5}$ possède deux antécédants $\frac{1}{2}$ et 2.
   La surjectivité de f :

$$\forall y\in\mathbb{R}, \exists ? x\in\mathbb{R},\ tel\ que\ y=f(x)=\frac{x}{(1+x^2)}$$

   on a $y=\frac{x}{(1+x^2)} \Longrightarrow yx^2-x+y=0$, $\Delta = 1-4y^2$ contre exemple : pour $y=1$, $\delta=-3<0$ d'où $\nexists x\in\mathbb{R}$, tel que $y=f(x)$ alors f n'est pas surjective.

Correction 7 1. Déterminons $f(\{(2,1),(1,2)\})$ et $g^{-1}(\{(1,1)\})$ pour les applications $f(n,m) = nm$ et $g(n) = (n,(n^2+1)$. Alors

$$f(\{(2,1),(1,2)\}) = \{f(n,m),\ tel\ que\ (n,m) \in \{(2,1),(1,2)\}\} = \{f(1,2), f(2,1)\} = \{2\}$$

$$g^{-1}(\{(1,1)\}) = \{n \in \mathbb{N}\ tel\ que\ g(n) \in (1,1)\}$$

$g(n) = (1,1) \Longrightarrow \begin{cases} n & =1 \\ (n+1)^2 & =1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n & =1 \\ (2)^2 & =1 \end{cases}$ ce qui est absurde.

Doù $g^{-1}(\{(1,1)\}) = \phi$

2. Les applications f et g sont elles injectives ? Surjectives ?
   - L'application f n'est pas injective car $f(1,2) = f(2,1) = 2$
   - L'application f est surjective car pour tout M dans $\mathbb{N}$ il existe un $(1,M)$ tel que $f(1,M) = M$.
   - L'application g n'est pas surjective car d'aprés la réponse de la question 1 $g^{-1}(\{(1,1)\}) = \phi$ alors pour $(1,1) \in \mathbb{N}^2$ il n'existe pas n tel que $g(n) = (1,1)$ c'est á dire $(1,1) \in \mathbb{N}^2$ ne possède pas d'antécédant dans $\mathbb{N}$.
   - L'application g est injective car $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, g(n_1) = g(n_2) \Longrightarrow (n_1,(n_1^2+1) = (n_2,(n_2^2+1) \Longrightarrow n_1 = n_2$

Correction 8 1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B) \Rightarrow ?(f(A) \subset f(B))$ Supposons
$y \in f(A) \Longrightarrow \exists x \in A\ tel\ que\ y = f(x) \Longrightarrow^{A\subset B} \exists x \in B\ tel\ que\ y = f(x) \Longrightarrow y \in f(B)$

2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) \subset ? f(A) \cap f(B)$
Supposons $y \in f(A \cap B)$ alors $\exists x \in (A \cap B)\ tel\ que\ y = f(x) \Longrightarrow \exists (x \in A) \wedge x \in B)\ tel\ que\ y = f(x) \Longrightarrow (\exists x \in A\ tel\ que\ y = f(x)) \wedge (\exists x \in B\ tel\ que\ y = f(x)) \Longrightarrow y \in f(A)\ et\ y \in f(B) \Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$

3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f\ injective \Longleftrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ (supplémentaire)
On montre la double implication $f\ injective \Longrightarrow^? f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
Montrer cette implication revient à montrer $f(A \cap B) =^? f(A) \cap f(B)$ sachant que f est injective, et pour montrer l'égalité on doit montrer la double inclusion

   $\subset^?$ Déja démontrer dans la question 2.

   $\supset^?$ Soit $y \in f(A) \cap f(B) \Longrightarrow y \in f(A)\ et\ y \in f(B) \Longrightarrow \exists x \in A\ tel\ que\ y = f(x)\ et\ \exists x' \in B\ tel\ que\ y = f(x)$ comme f est injective $x = x'$ d'où

   $$\exists x \in A \cap B\ tel\ que\ y = f(x) \Longrightarrow f(x) \in f(A \cap B) \Longrightarrow y \in f(A \cap B)$$

   d'où l'inclusion et ainsi l'égalité.
   $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Longrightarrow^? f\ injective$
   Montrer cette implication revient à montrer que f est injective sachant que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
   Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$ dans ce cas on considère les ensemble $\{x\}$ et $\{x'\}$ tels que $f(\{x\} = f(\{x'\})$ et comme $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ alors $f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) \subset f(\{x\} \cap \{x'\})$ comme $f(\{x\} = f(\{x'\})$ alors $f(\{x\}) \subset f(\{x\} \cap \{x'\})$ ceci n'est pas possible sauf si $x = x'$ sinon $f(\{x\}) = \phi$ d'où f est injective .

D'où l'équivalence.

4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ Supposons

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in (A \cup B) \\ &\iff f(x) \in A \text{ } ou \text{ } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ } ou \text{ } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

5. $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(F \backslash A) \subset E \backslash f^{-1}(A)$ Supposons

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \backslash A) &\Longrightarrow f(x) \in (F \backslash A) \\ &\Longrightarrow f(x) \in F \text{ } et \text{ } f(x) \notin A \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(F) \text{ } et \text{ } x \notin f^{-1}(A) \\ &\Longrightarrow x \in E \backslash f^{-1}(A) \end{aligned}$$

6. $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(\overline{A}) =^? \overline{f^{-1}(A)}$ (supplémentaire).
   On procède par équivalence
   Soit $x \in f^{-1}(\overline{A}) \iff f(x) \in \overline{A} \iff f(x) \notin A \iff x \notin f^{-1}(A) \iff x \in \overline{f^{-1}(A)}$
   dù l'égalité.

Correction 9 1. Si f est injective alors $A = (f^{-1} \circ f)(A)$. Démontrons $A = (f^{-1} \circ f)(A)$ sachant que f est injective. Alors démontrer l'égalité revient à démontrer la double inclusion $A \subset^1 (f^{-1} \circ f)(A)$ et $(f^{-1} \circ f)(A) \subset^2 A$

$\subset^1$ Comme $A \subset E$, on suppose $x \in A \Longrightarrow f(x) \in f(A) \Longrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$. Doù $x \in f^{-1} \circ f(A)$ et la première inclusion est démontrer $A \subset (f^{-1} \circ f)(A)$

$\subset^2$ supposons $x \in (f^{-1} \circ f)(A) \Longrightarrow x \in f^{-1}(f(A)) \Longrightarrow f(x) \in f(A) \Longrightarrow \exists x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$ et comme f est injective $x = x'$ et donc $x \in A$ et ainsi $(f^{-1} \circ f)(A) \subset A$

D'où l'égalité.

2. Si f est surjective alors $(f \circ f^{-1})(B) = B$. Démontrons $(f \circ f^{-1})(B) = B$ sachant que f est surjective. Alors démontrer l'égalité revient à démontrer la double inclusion $(f \circ f^{-1})(B) \subset^1 B$ et $B \subset^2 (f \circ f^{-1})(B)$

$\subset^1$ Comme $(f \circ f^{-1})(B) \subset F$, on suppose $y \in (f \circ f^{-1})(B) \Longrightarrow y \in f(f^{-1}(A)) \Longrightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x) \Longrightarrow f(x) \in B$ tel que $y = f(x) \Longrightarrow y \in B$ d'où l'inclusion

$\subset^2$ Comme $B \in F$ supposons $y \in B$ comme f est surjective y possède au moins un antécédant, c'est à dire $\exists x \in E$ tel que $y = f(x) \in B$ donc $f(x) \in B \Longrightarrow x \in f^{-1}(B) \Longrightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B)) \Longrightarrow y \in f \circ f^{-1}(B)$ d'où la deuxième inclusion.

Alors l'égalité est démontrée.

Correction 10 1. $(g \circ f)$ injective $\Longrightarrow f$ injective? Soit $x_{1,}x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$, alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ comme $g \circ f$ est injective ainsi $x_1 = x_2$ d'où f est injective.

2. $(g \circ f)$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective? soit $y \in C$ Puisque $g \circ f$ est surjective, $\exists a \in A$ avec $g \circ f(a) = y$. Posons $b = f(a)$. On a alors $g(b) = y$, ce qui prouve que g est surjective.