Chapitre 2: Notions sur les ensembles et applications

Docteur Amri Hanene[1]

21 décembre 2020

1. Université Badji Mokhtar d'Annaba

Table des matières

Résumé Ce document est rédigé pour les étudiants de première année mathématiques et informatiques, c'est un support du module algèbre du premier semestre. Ce module contient cinq chapitres, notions de logique mathématiques, ensembles et applications, relations binaires, structures algèbriques et anneau des polynômes. Le cours est diviser en plusieurs parties, dont la deuxième partie est le deuxième chapitre présentée ci-dessous.

Chapitre 2

Notions sur les ensembles et applications

2.1 Notions sur les ensembles

DÉFINITION 1. ***Un ensemble*** *est une collection d'objets, où chaque objet est appelé élément. Il y a principalement deux façons de définir un ensemble :*

- *En extension si on donne la liste de ses éléménts.*
- *En compréhension si on ne donne pas la liste de ses élements mais juste leur propriété(s).*

EXEMPLE 1. $E = \{x \in \mathbb{N}, x \text{ divise } 8\}$ *ensemble défini en compréhension.*
$E = \{1, 2, 4, 8\}$ *ensemble défini en extension.*

DÉFINITION 2.
- *Un ensemble est dit fini lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel. Dans ce cas, le nombre d'élément est appelé le cardinal de l'ensemble. On le note card(E).*
- *L'ensemble qui n'est pas fini est dit infini.*

EXEMPLE 2. $A = \{x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 4\}$ *est fini de* $card(A) = 5$.

DÉFINITION 3.
- *L'ensemble vide est noté $\emptyset$, qui ne contient aucun élément. Par convention $card(\emptyset) = 0$.*
- *On appelle singleton un ensemble qui ne contient qu'un seul élément. Son cardinal est 1.*

DÉFINITION 4. *Si a est un élément de E, on écrit $a \in E$ et on lit a appartient à E.*
Si a n'est pas un élément de E, on écrit $a \notin E$ et on lit a n'appartient pas à E.

1 Partie, sous ensemble

L'inclusion

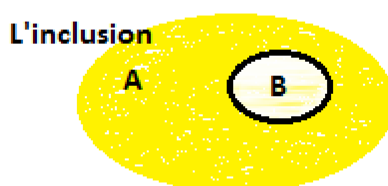
Nous dirons qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B lorsque tout élément de A appartient à B, on écrit :

$$A \subset B$$

par définition :

$$(A \subset B) \Longrightarrow (\text{ pour tout } x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

La formule $(A \subset B)$ se lit indifféremment :
- « A est inclu dans B »,
- « A est une partie de B»,
- « A est un sous-ensemble de B ».



Remarque 1.

$$\begin{aligned} A \not\subset B &\iff non(A \subset B) \\ &\iff non(\forall x \in E, x \in A \Longrightarrow x \in B) \\ &\iff \exists(x \in E, x \in A \ et \ x \notin B). \end{aligned}$$

Ainsi A n'est pas inclus dans B s'il existe au moins un élément de A qui n'est pas un élément de B.

Exemple 3. *1.* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$, *car* $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ *et* $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

Remarque 2.
- *L'ensemble $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.*
- *Tout ensemble est inclus dans lui même.*
- *Si A et B sont deux ensembles finis et si $A \subset B$ alors $card(A) \leq card(B)$*

Egalité de deux ensembles

On dit que deux ensemble A et B, sont égaux(ou identiqued) si tout élément de A est un élément de B et si tout élément de B est un élément de A autrement dit

$$(A = B) \iff (A \subset B \ et \ B \subset A)$$

Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont distincts et on note $A \neq B$

Exemple 4. *On considère les trois ensembles finis de* $\mathbb{R}$ *suivants* $\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 = 0\}; \\ B = \{1, 2\}; \\ C = \{1, 2, \sqrt{2}\}. \end{cases}$

Alors $A = B$ *et* $B \neq C$. *On remarque que* $B \subset C$.

Ensembles des parties d'un ensemble

Définition 5. *Soit* E *un ensemble donné, on note* $\mathcal{P}(E)$ *, l'ensemble des parties de* E

$$\mathcal{P}(E) = \{A, A \subset E\}$$

Proposition 1. *Si* E *un ensemble fini de cardinal* n *alors l'ensemble* $\mathcal{P}(E)$ *et fini est*

$$card(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Exemple 5.

$$E = \{1, 2\}$$

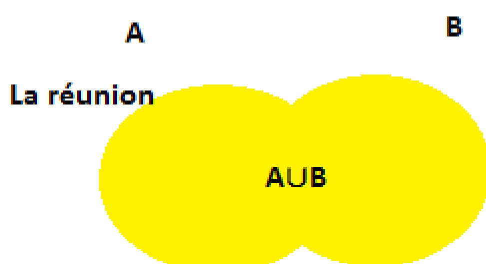
$$\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$card(\mathcal{P}(E)) = 2^2 = 4.$$

2 Opérations sur les ensembles

La réunion de deux ensembles

La réunion ou l'union de deux ensembles A et B est l'ensemble des élements qui appartiennent à A ou B, on écrit $A \cup B$.



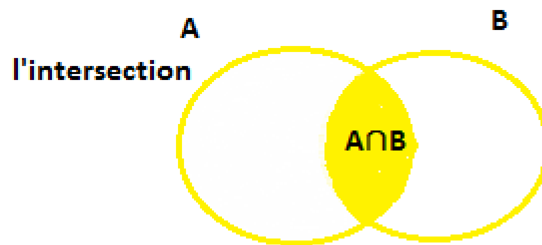
$$x \in (A \cup B) \Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

La négation :

$$x \notin (A \cup B) \Longleftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B).$$

L'intersection de deux ensembles

L'intersection de deux ensembles A, B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et B on note $A \cap B$.



$$x \in (A \cap B) \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$

La négation :

$$x \notin (A \cap B) \Longleftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B).$$

Remarque 3. *Si A, B n'ont pas d'élements en commun $A \cap B = \phi$, on dit que A et B sont disjoints.*

Différence de deux ensembles-Complémentaire d'un ensemble

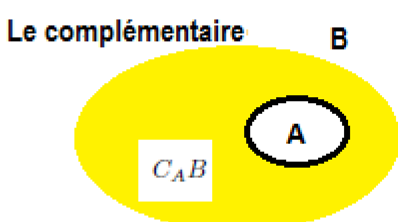
Définition 6. *Soient E un ensemble et A, B deux sous ensembles de E. La différence des ensembles A et B est l'ensemble des élements de A qui n'appartient pas à B, noté $A \backslash B$.*

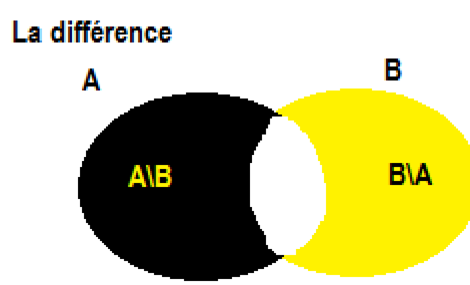
$$A \backslash B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Si $B \subset A$ alors $A \backslash B$ est aussi appelé le complémentaire de B dans A, il est noté $C_A B$,

$$C_A B = \{x / x \in B \wedge x \notin A\}.$$

Remarque 4. *la notation $\overline{A}$ et A^c veulent dire le complémentaire de l'ensemble A dans le grand ensemble qui le contient.*





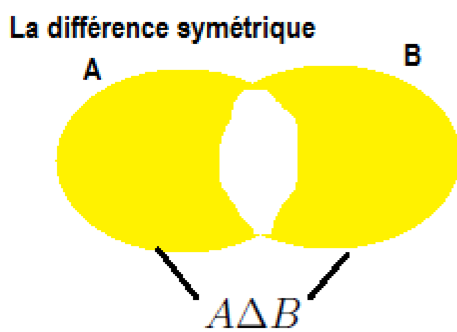
Exemple 6. *Soit* $E = \{1, 2, 3, 9, 10\}$ *et* $A = \{1, 9, 10\}$ *alors* $C_E^A = E\backslash A = \overline{A} = A^c = \{2, 3\}$

Remarque 5.
1. $C_E\emptyset = E$, $C_E E = \emptyset$, $C_E(C_E A) = A$
2. $A \cap C_E A = \emptyset$, $A \cup C_E A = E$
3. $C_E A = B \Longleftrightarrow (A \cup B = E)$ *et* $(A \cap B = \phi)$.
4. $A\backslash B = A \cap B^c$.

Différence symétrique de deux ensembles

Soient E un ensemble non vide et $A, B \subset E$, la différence symétrique entre deux ensembles A, B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A\backslash B$ ou $B\backslash A$ noté $A\Delta B$.

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \\ &= (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A) \\ &= (A \cup B)\ (A \cap B). \end{aligned}$$



$$x \in A\Delta B \Longleftrightarrow x/x \in (A \setminus B) \vee x \in (B\ A).$$

Propriété 1. *Soient* A, B *et* C *trois sous ensembles d'un ensemble* E. *Les propriètés suivantes se déduisent de celles introduites dans la section précédente*

1. $A \cap A = A$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cap B = B \cap A$ *commutativité de l'intersection*
4. $A \cup B = B \cup A$ *commutativité de l'union*
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *associativité de l'intersection*
6. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *associativité de l'union*
7. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$
8. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$
9. $C_E A \cap A = \phi$

10. $C_E A \cup A = E$

Exemple 7. *Soit* $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2,4,6,8\}$

1. $A \subset E$, $B \subset E$.
   A n'est pas inclus dans B car $1 \in A \wedge 1 \notin B$. *$B$ n'est pas inclus dans A car* $8 \in B \wedge 8 \notin A$.
2. $A \cap B = \{2,4,6\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$.
3. $A \setminus B = \{1,3,5\}$, $B \setminus A = \{8\}$.
4. $A \Delta B = \{1,3,5,8\}$.
5. $\overline{A} = E \setminus A = C_E A = \{7,8\}$

3 Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles donnés, le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté $A \times B$ défini par

$$A \times B = \{(x,y), x \in A \text{ et } y \in B\}$$

l'élément (x,y) est appelé couple ordonné. On doit faire la différence entre (x,y) et (y,x). $A \times B$ peut se lire A croix B,

$$[(x,y) = (x_0,y_0)] \Longleftrightarrow [x = x_0 \text{ et } y = y_0]$$

La négation

$$[(x,y) \neq (x_0,y_0)] \Longleftrightarrow [x \neq x_0 \text{ ou } y \neq y_0]$$

Dans le cas où $(A = B)$ on peut écrire $A \times A = A^2$.

Exemple 8.

1. $A = \{1,2\}$,$B = \{1,2,3\}$
   $$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\},$$
   $$B \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\},$$
   $A \times B \neq B \times A$, *car* $(3,2) \in B \times A$, *et* $(3,2) \notin A \times B$.
2. *Le plan de la géométrie analytique est l'ensemble produit $\mathbb{R}^2$, l'espace est l'ensemble des triplets (x,y,z) de trois nombres réels, donc l'ensemble $\mathbb{R}^3$.*
3. *L'ensemble des fractions a/b est l'ensemble des couples $(a,b$ où a est un entier quelconque et b un entier non nul, c'est donc l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.*

2.2 Notions sur les applications

Définition 7. *On appelle fonction d'un ensemble E vers un (ou dans un) ensemble F, toute correspondance f qui associe à tout élément de E au plus un élément de F. On note alors*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

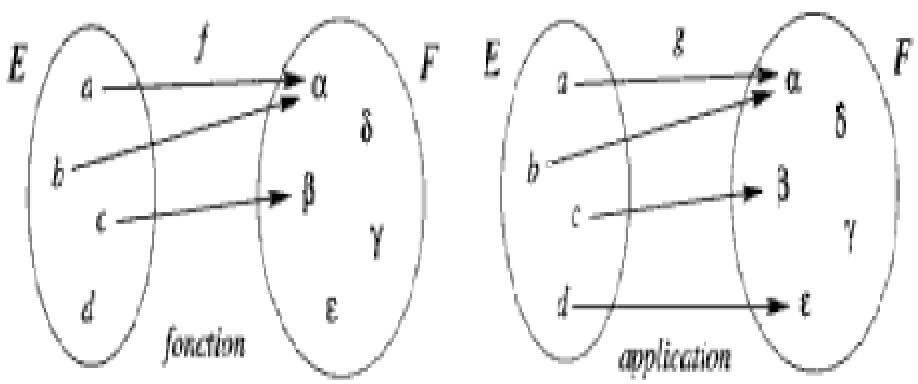
L'ensemble de définition ou le domaine de définition d'une fonction f définie de E dans F, est l'ensemble des éléments de E ayant une image par f, on note $\mathcal{D}_f$, où $\mathcal{D}_f \subset E$

Définition 8. *Etant donné deux ensembles E et F, on appelle une application f de E dans F toute correspondance f qui associe à tout élément $x \in E$ un et un seul élément $y = f(x) \in F$, autrement dit une fonction f définie de E vers F est une application si son domaine de définition est E. On conservera aussi la même notation*

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- E est l'ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de f.
- $y = f(x)$ est appelé image de x, et x est appelé antécédent de $y = f(x)$.
- L'application d'un ensemble E vers lui même qui à chaque élément x associe x, est appelée application identité notée I_A

$$\begin{array}{rcl} I_A : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & I_A(x) = x \end{array}$$



Exemple 9. *Considérons*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

il est à noter que f est une fonction et que g est une application, en effet 0 *ne possède pas d'image par f.*

Egalité de deux applications

Deux applications $f : E \longrightarrow F$, $g : E' \longrightarrow F'$ sont égales si et seulement si : si elles ont même ensemble de départ même ensemble d'arrivée et si :

$$\forall x \in E, f(x) = g(x)$$

on écrit alors : $f = g$.

1 Image directe et image réciproque

Image directe

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application donnée, et $A \subset E$. On appelle image d'un sous ensembme A le sous ensemble de F noté $f(A)$ défini par

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A \ telque \ y = f(x)\}$$

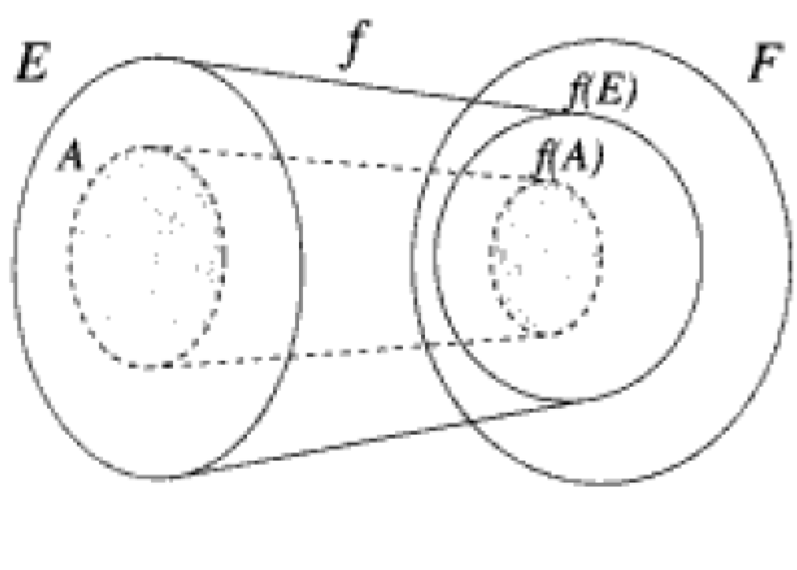
ou

$$f(A) = \{f(x), \ telque \ x \in A\}$$

$f(A)$ ainsi définie s'appelle image directe de l'ensemble A par f. On vérifie facilement que l'image de A par f est une sous ensemble de $f(E)$, qui est lui même un sous ensemble de l'ensemble d'arrivée F, en d'autre terme

$$A \subset E \Longrightarrow f(A) \subset f(E) \subset F$$

.



EXEMPLE 10. 1. *Soit l'application* $f : x \in \mathbb{R}\backslash\{2\} \longmapsto \frac{1}{x-2} \in \mathbb{R},\ f(\mathbb{R}\backslash\{2\}) = \mathbb{R}^*$

2. *Soit l'application* $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R},\ g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$

Image réciproque

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $B \subset F$, on appelle l'image réciproque de B par f, la partie de E notée $f^{-1}(B)$ telle que

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\},$$

sachant que $f^{-1}(B) \subset E$.

EXEMPLE 11. 1. *Soit f l'application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f : [0,3] & \longrightarrow & [0,4] \\ x & \longmapsto & f(x) = 2x+1 \end{array}$$

Trouver $f([0,1])$ *?*
$f([0,1]) = \{f(x)/x \in [0,1]\} = \{2x+1/0 \le x \le 1\}$,
on a :$0 \le x \le 1 \Longrightarrow 0 \le 2x \le 2 \Longrightarrow 1 \le 2x+1 \le 3$, *alors* $f([0,1]) = [1,3]$, *et on remarque que* $f([0,1]) \subset [0,4]$

2. *Soit f l'application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f : [0,2] & \longrightarrow & [0,4] \\ x & \longmapsto & f(x) = (2x-1)^2 \end{array}$$

Calculer $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(]0,1[)$.

$$f^{-1}(0) = \{x \in [0,2]/f(x) \in 0\} = \{x \in [0,2]/f(x) = 0\}$$

$$= \{x \in [0,2]/(2x-1)^2 = 0\} = \{\frac{1}{2}\}.$$

$f^{-1}(]0,1[) = \{x \in [0,2]/f(x) \in]0,1[\} = \{x \in [0,2]/0 < (2x-1)^2 < 1\}$,
On a : $(2x-1)^2 > 0$ *est verifiée donc* $x \in [0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},2]$. *D'autre part*

$$(2x-1)^2 < 1 \Longrightarrow |2x-1| < 1 \Longrightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Longrightarrow 0 < x < 1,$$

et donc $x \in]0,1[$, *en regroupant les deux inégalités, on obtient*

$$f^{-1}(]0,1[) = ([0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},2]\cap]0,1[=]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[.$$

3.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = sinx \end{array}$$

$f^{-1}(2) = \phi$, $f^{-1}(\frac{1}{2}) = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}k \in \mathbb{Z}$.

2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

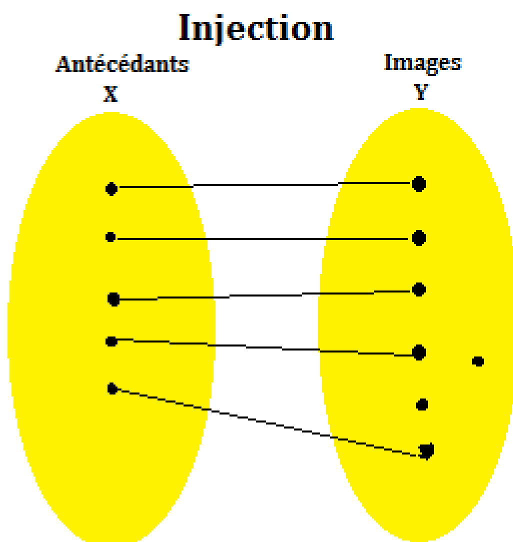
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application donnée.

Injectivité

On dira que f est une application injective si et seulement si tout élément y de F possède au plus un antécédent x dans E. En d'autres termes

$$\begin{aligned}(f \textit{ est injective}) &\iff (\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2) \\ &\iff (\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \textit{ (par contraposee)}\end{aligned}$$

C'est à dire $\forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au plus une solution $x \in E$



Exemple 12. *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 3x + 5 \end{aligned}$$

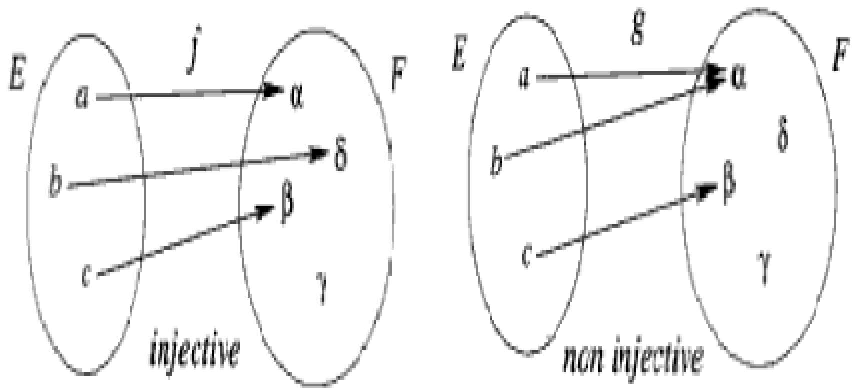
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow 3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

En conclusion f est injective.

Remarque 6. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est non injective s'il existe deux éléments distints qui ont même image. D'après les règles de négation "f n'est pas injective" se traduit par :*

$$\exists (x, x') \in E^2, x \neq x' \textit{ et } f(x) = f(x')$$



Exemple 13. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=x^2-1 \end{array}$$

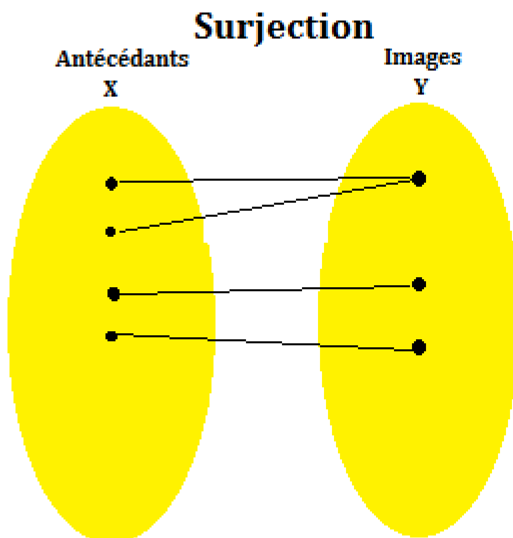
On remarque que $f(1)=f(-1)=0$ *l'image* 0 *possède deux antécédants d'où* f *n'est pas injective.*

Surjectivité

On dira que f est une application surjective si et seulement si tout élément y de F possède au moins un antécédent x dans E. En d'autres termes

$$(\ f \ \textit{est surjective}\ ) \Longleftrightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x))$$

c'est à dire ($\forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au moins une solution $x \in E$)



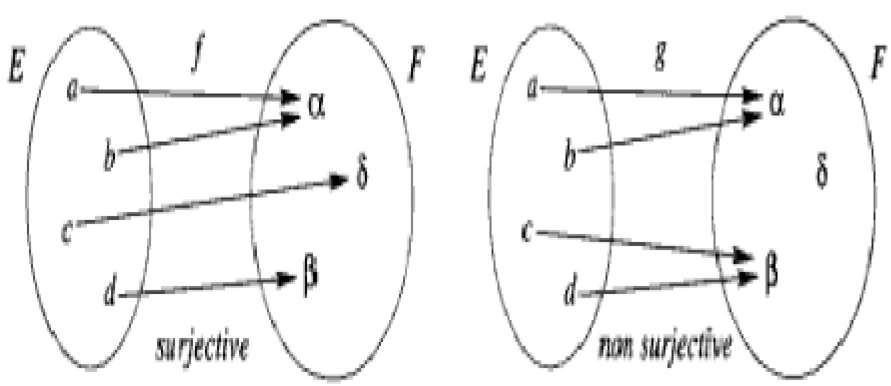
Il est immédiat de vérifier q'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f de E dans F soit surjective est que l'on ait

$$f(E) = F$$

REMARQUE 7. *Une application f de E dans F est non surjective si est seulement si*

$$f(E) \subset F \quad et f(E) \neq F$$

Autrement dit, l'application f n'est pas surjective s'il existe un élément de l'ensemble d'arrivée F qui ne possède pas d'antécédentpar f.



EXEMPLE 14. *1. Soit*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=3x+5 \end{array}$$

Soit $y\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} y=f(x) & \Longrightarrow & y=3x+5 \\ & \Longrightarrow & x=\dfrac{y-5}{3}, \end{array}$$

ainsi

$$\forall y\in\mathbb{R}, \exists x=\frac{y-5}{3} \textit{ tel que } y=f(x)$$

. En conclusion f *est surjective.*

2.

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & g(x)=4x+2. \end{array}$$

On cherche pour tout y *in*$\mathbb{N}$ *l'existance d'un certain* $x\in\mathbb{N}$ *tel que* $y=g(x)$

$$y=g(x)\Longrightarrow y=4x+2\Longrightarrow x=\frac{y-2}{4}$$

, or,

$$\frac{y-2}{4}\notin\mathbb{N}$$

Contre exemple *pour* $y=1$, $x=\frac{-1}{4}\notin\mathbb{N}$, *donc pour* $y=1, \nexists x\in\mathbb{N}$ *tel que* $y=g(x)$, *d'où* g *n'est pas surjective.*

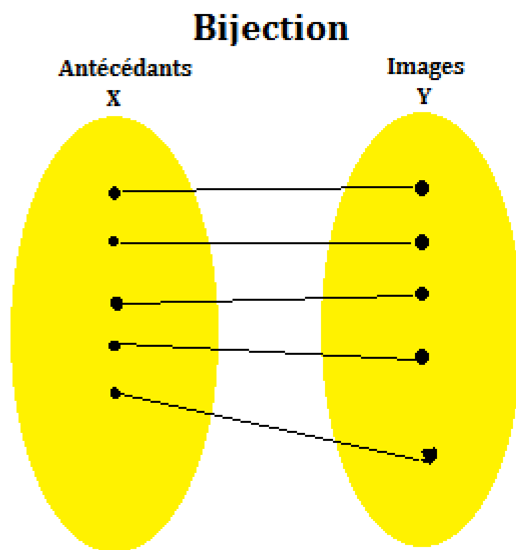
Bijectivité

On dira que f est une application bijective(ou f est une bijection) si et seulement si elle est injective et surjective à la fois. En d'autres termes f est une application bijective si et seulement si tout élément y de F possède un et un seul antécédent x dans E

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow \forall y\in F, \exists x\in E \text{ tel que } y=f(x)$$

autrement dit

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow (\forall y\in F, \text{l'équation } y=f(x) \text{ possède une et une seule solution } x\in E)$$



REMARQUE 8. *Pour qu'une application ne soit pas bijective il suffit qu'elle ne soit pas injective ou qu'elle ne soit pas surjective.*

EXEMPLE 15. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 3x + 5 \end{array}$$

Comme on l'a déja vu, l'application f est injective et surjective, elle est donc bijective. Une application bijective d'un ensemble E dans lui même est appelée permutation.

REMARQUE 9. *Considérons l'exemple*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Observons alors que si $y < 0$, l'équation $y = f(x) = x^2$ ne posséde pas de solution dans $\mathbb{R}$, ce qui nous permet de conclure que f n'est pas surjective. D'un autre côté on remarque par exemple que $f(2) = f(-2) = 4$ bien que $2 \neq -2$, on en déduit donc que f n'est pas injective.
Soit à présent l'application

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & g(x) = x^2 \end{array}$$

Il est facile de voir que g est surjective, mais non injective. Il est tout aussi facile de vérifier que l'application

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x^2 \end{array}$$

est injective mais non surjective.

DÉFINITION 9. *Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ un application bijective, l'application notée*

$$f^{-1} : F \longrightarrow E$$

qui à y appartenant à F lui associe l'unique élément x de E tel que $y = f(x)$ est appelée application réciproque de f (ou bijection réciproque), autrement dit, l'application f^{-1} est définie pour tout $y \in F$ par

$$f^{-1}(y) = x \quad si \quad y = f(x)$$

3 Application composée

Soient E, F, G des ensembles et deux applications f, g telles que

$$f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto f(x), y \longmapsto g(y)$$

On définit l'application composée de f et g notée $(g \circ f)$ à lire g rond f par

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g \circ f(x) = g(f(x)) \end{array}$$

EXEMPLE 16.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 3x + 5 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = -2x + 3 \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} g \circ f(x) & = & g(f(x)) \\ & = & -2f(x) + 3 \\ & = & -2(3x + 5) + 3 \\ & = & -6x + -7 \end{array}$$