Chapitre 1: Notions de logique mathématiques

Docteur Amri Hanene[1]

14 décembre 2020

1. Université Badji Mokhtar d'Annaba

Table des matières

1 Notions de logique mathématiques **5**
1.1 Notions de logique 5
1.2 Opérateurs logiques 6
1 La conjonction *et*, noté $\wedge$ 6
2 La disjonction *ou*, noté $\vee$ 6
3 L'implication $\Longrightarrow$ 6
4 L'équivalence $\Longleftrightarrow$ 8
1.3 Quantificateurss logiques $\forall, \exists, \exists!$ 9
1.4 les différentes méthodes de raisonnement mathématiques 10
1 Méthode de raisonnement direct 10
2 Méthode du raisonnement par la contraposée 11
3 Méthode du raisonnement par l'absurde 11
4 Méthode du raisonnement par contre exemple 11
5 Méthode du raisonnement par récurence 12

Résumé Ce document est rédigé pour les étudiants de première année mathématiques et informatiques, c'est un support du module algèbre du premier semestre. Ce module contient cinq chapitres, notions de logique mathématiques, ensembles et applications, relations binaires, structures algèbriques et anneau des polynômes. Le cours est diviser en plusieurs parties, dont la première partie est le premier chapitre présentée ci-dessous.

Chapitre 1

Notions de logique mathématiques

1.1 Notions de logique

DÉFINITION 1. ***une proposition*** *est une expression mathématique à laquelle on peut attribuer la valeur de vérité vrai ou faux.*

EXEMPLE 1.
1. *"Tout nombre premier est pair", est une proposition fausse.*
2. *"$3 < 10$", est une proposition vraie.*
3. *"$\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$ ", est une proposition vraie.*
4. *"$x \in \mathbb{R}$", n'est pas une proposition (car x est inconnu on ne peut pas décidé s'il est un nombre réel ou non).*

DÉFINITION 2. *Toute proposition démontrée vraie est appelée théorème (par exemple le théorème de PYTHAGORE, Thalès...)*

La négation

DÉFINITION 3. ***La négation d'une proposition*** *P que nous noterons $\overline{P}$, $nonP$ ou $\neg P$ est vraie lorsque P est fausse, fausse lorsque P est vraie.*
La négation d'une proposition peut se schématisée par le tableau qui s'appelle une Table de vérité

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

V signifiant vraie et F faux.

EXEMPLE 2.
1. *"P" :"L'application f est croissante", alors "$nonP$" :"L'application f n'est pas coissante".*
2. *"P" :"$x + 1 = 0$", alors "$\overline{P}$" :"$x + 1 \neq 0$".*

1.2 Opérateurs logiques

1 La conjonction *et*, noté $\wedge$

DÉFINITION 4. ***la conjonction*** *de deux propositions* P, Q *est notée par* $(P \wedge Q)$ *ou tout simplement* $(P$ *et* $Q)$.
$P \wedge Q$ *est vraie si et seulement si* P *et* Q *le sont toutes les deux, et fausse dans tous les autres cas. Sa table de vérité est donnée par*

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EXEMPLE 3.
1. *"4 est le carré de 2" et"2 est un nombre pair" cette proposition est vraie.*
2. *"*$5 \geq 3 \ \wedge \ 3 \geq 4$*" cette proposition est fausse.*

PROPRIÉTÉ 1. *Deux propositions sont incompatibles si leur conjonction est toujours fausse.*

EXEMPLE 4. P, $\neg P$ *sont incompatibles ainsi* $x < 3$ *et* $x \geq 3$ *sont incompatibles.*

2 La disjonction *ou*, noté $\vee$

la disjonction de deux propositions P, Q est notée par $(P \vee Q)$ ou tout simplement $(P$ *ou* $Q)$.
$P \vee Q$ est vrai si au moins une des propositions P, Q est vraie, fausse dans tous les autres cas. Sa table de vérité est donnée par

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EXEMPLE 5.
1. *"*4 *est un nombre pair ou* 5 *est un nombre premier" cette proposition est vraie.*
2. *"*$(2 < 3) \vee (2$ *divise* $5)$*" cette proposition est vraie.*
3. *"*$(2 > 3)$ *ou* $(2$ *divise* $5)$*" cette proposition est fausse.*

3 L'implication $\Longrightarrow$

L'implication de deux propositions P, Q est notée : $(P \Longrightarrow Q)$ on dit $(P$ *implique* $Q)$ ou bien si P alors Q.

$P \Longrightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse, sinon $P \Longrightarrow Q$ est vraie dans les autres cas. Sa table de vérité est donnée par

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EXEMPLE 6. *1. "J'ai mon permis de conduire alors j'ai plus de 18 ans". Vraie c'est une conséquence.*

2. "$0 \leq x \leq 4 \Longrightarrow \sqrt{x} \leq 2$". *Vraie*

REMARQUE 1. *les deux propositions :* $P \Longrightarrow Q$ *et* $Q \Longrightarrow P$ *sont appelées réciproques l'une de l'autre.*

La réciproque de l'implication La réciproque d'une implication $(P \Longrightarrow Q)$ est une implication $(Q \Longrightarrow P)$.

EXEMPLE 7. *1. la réciproque de la proposition "J'ai mon permis de conduire alors j'ai plus de 18 ans" est "j'ai plus de 18 ans alors J'ai mon permis de conduire".*

2. La réciproque de $(0 \leq x \leq 4 \Longrightarrow \sqrt{x} \leq 2)$ *est* $(\sqrt{x} \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq x \leq 4)$.

La contraposée de l'implication La contraposée de l'implication de $(P \Longrightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$, on a

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$$

EXEMPLE 8. *1. la contraposée de la proposition "J'ai mon permis de conduire alors j'ai plus de 18 ans" est "j'en ai pas plus de 18 ans alors J'en ai pas mon permis de conduire".*

2. La contraposée de :$(x+1=0 \Longrightarrow x=-1)$ *est* $(x \neq -1 \Longrightarrow x+1 \neq 0)$.

REMARQUE 2. $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.

La négation d'une implication

$$\overline{(P \Longrightarrow Q)} \Longleftrightarrow \overline{(\overline{P} \vee Q)} \Longleftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$$

.

EXEMPLE 9. *1. la négation de la proposition "J'ai mon permis de conduire alors j'ai plus de 18 ans" est "J'ai mon permis de conduire et j'en ai pas plus de 18 ans".*

2. $(x \in [0,1] \Longrightarrow x \geq 0)$ *sa négation :* $(x \in [0,1] \wedge x < 0)$.

Conclusion

⋆ La réciproque de $(P \Longrightarrow Q)$ est $(Q \Longrightarrow P)$.
⋆ la contraposée de $(P \Longrightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$.
⋆ la négation de $\overline{(P \Longrightarrow Q)}$ est $(P \wedge \overline{Q})$.

4 L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L'équivalence de deux propositions P, Q est notée par $P \Longleftrightarrow Q$, autrement dit deux propositions sont équivalentes si chacune d'elles implique l'autre ($P \Longrightarrow Q$) *et* ($Q \Longrightarrow P$). On dit que $P \Longleftrightarrow Q$ si P et Q ont la même valeur de verité, sinon ($P \Longleftrightarrow Q$) est fausse (c'est à dire P et Q ne sont pas équivalentes).
$P \Longleftrightarrow Q$ peut se lire :

- P (resp. Q) équivalent à Q (resp. P).
- Q (resp. P) si et seulement si P (resp. Q),
- Pour que Q (resp. P) soit vraie il faut et il suffit que P (resp Q) soit vraie,
- La vérité de Q (resp. P) est une condition nécessaire et suffisante de la vérité de P (resp. Q).

Sa table de vérité est donnée par

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 10. "$x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -2$."

Théorème 1. *Soit P, Q deux propositions on a :*

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)).$$

Démonstration. On démontre cette équivalence par la table de vérité

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$	$(P \Longleftrightarrow Q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

On remarque que les propositions logiques $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ et $(P \Longleftrightarrow Q)$ ont les mêmes valeurs de vérite, donc elles sont équivalentes. □

Propriété 2. *Quelle que soit la valeur de vérité des propositions P, Q, R les propriétés suivantes sont toujours vraies.*

1. $\overline{P} \vee P$.
2. $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P$
3. $P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P$ *Commutativité de* $\wedge$.
4. $P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P$ *Commutativité de* $\vee$.
5. $((P \wedge Q) \wedge R) \Longleftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$. *Associativité de* $\wedge$.
6. $((P \vee Q) \vee R) \Longleftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$. *Associativité de* $\vee$.
7. $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ *Distributivite de* $\wedge$ *par rapport à* $\vee$.
8. $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ *Distributivite de* $\vee$ *par rapport à* $\wedge$.
9. $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ *Transitivité de* $\Longrightarrow$.

Régles de Morgan

PROPRIÉTÉ 3. *Soient P et Q deux propositions logiques, alors :*

1. $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$.
2. $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

Démonstration. On démontre ces règles en donnant les valeurs de vérités des propositions logiques correspondantes, en utilisant la table de vérité.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

On voit que les propositions logiques $\overline{P \wedge Q}$ et $\overline{P} \vee \overline{Q}$ ont les mêmes valeurs de vérite, donc elles sont équivalentes. De même pour $\overline{P \vee Q}$ et $\overline{P} \wedge \overline{Q}$. □

1.3 Quantificateurss logiques $\forall, \exists, \exists!$

1. Le quantificateur universel noté $\forall$ se lit "pour tout" ou "quel que soit"
   La relation pour tous x tel que $P(x)$ est notée : $\forall x, P(x)$ se lit quel que soit x, x satisfait la propriété $P(x)$" .
2. Le quantificateur existentiel noté $\exists$, se lit "il existe au moins"
   La relation il existe au moins un x tel que $P(x)$ est notée $\exists x, P(x)$ se lit il existe au moins un x qui satisfait $P(x)$.
   - Le quatificateur $\exists!$ signifie il existe un et un seul élément, c'est à dire un unique élément
     La relation il existe un unique x tel que $P(x)$ est notée $\exists! x, P(x)$ se lit il existe un unique x qui satisfait $P(x)$.

EXEMPLE 11. *Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :*

1. *$P(x)$: La fonction f est nulle pour tous $x \in IR$ devient $P(x)$: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.*
2. *$P(x)$: la fonction f s'annule en x_0 devient $P(x)$: $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$.*

Régles de négation Les deux quantificateurs sont liés par le fait que la négation de l'un donne l'autre,

$$\overline{(\forall x, P(x))} \Longleftrightarrow (\exists x, \overline{P(x)})$$

$$\overline{(\exists x, P(x))} \Longleftrightarrow (\forall x, \overline{P(x)})$$

EXEMPLE 12. *la négation de* $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0)$ *est* $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0)$

REMARQUE 3. *Dans une phrase quantifiée, on ne peut pas,a priori, modifier l'ordre des quantificateurs,*

1. $\forall x \in E, \exists y \in E, P(x,y)$ *se lit il existe au moins un x pour tout y dans E, c'est à dire x est fixé(constante) et y qui varie dans E.*
2. $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x,y)$ *se lit pour tout x de E il existe au moins un y dans E, tel que $P(x,y)$ soit vérifier, c'est à dire y dépend x , par une certaine relation.*
3. *On peut permuter entre deux quantificateurs de la même nature :*
$$\forall x, \forall y, P(x,y) \Longleftrightarrow \forall y, \forall x, P(x,y)$$
.
$$\exists x, \exists y, P(x,y) \Longleftrightarrow \exists y, \exists x, P(x,y)$$
.

EXEMPLE 13. *Indiquer lesquelles des propositions suivantes sont vraies et celles qui sont fausses.*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y>0$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y>0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y>0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y>0$.

Alors

1. *est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y=-x+1$ et alors $x+y=1>0$.*
2. *est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leq 0$ est vraie. étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y=-(x+1)$ et alors $x+y=x-x-1=-1 \leq 0$.*
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y>0$. *est fausse, contre exemple $x=-1, y=0$.*
4. *vraie car $\exists x=0, \exists y=1; 0+1>0$.*

1.4 les différentes méthodes de raisonnement mathématiques

Pour montrer que $(P \Longrightarrow Q)$ est vraie on peut utiliser ce qui suit :

1 Méthode de raisonnement direct

On suppose que P est vraie et on démontre que Q l'est aussi.

EXEMPLE 14. *Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$ si n est pair $\Longrightarrow n^2$ est pair. On suppose que n est pair, i.e., $\forall k \in \mathbb{Z}, n=2k$ donc*

$$\begin{aligned} n.n &= (2k)(2k) \\ n^2 &= 2(2k^2 \\ n^2 &= 2k' \end{aligned}$$

on pose $k' = 2k^2 \in \mathbb{Z}$ *ainsi* $\forall k' \in \mathbb{Z}, n^2 = 2k'$, n^2 *est pair, d'où le résultat.*

2 Méthode du raisonnement par la contraposée

Nous avons vu que $[(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})]$. Au lieu de démontrer que $(p \Longrightarrow q)$ est vraie, il est parfois plus commode de démontrer que sa contraposée $(\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$ est vraie. Illustrons cela par un exemple

EXEMPLE 15. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *un entier naturel. Montrer que [(*n^2 *pair))*$\Longrightarrow$ *(n pair)] . Pour démontrer cela nous allons procéder par contraposée, donc au lieu de montrer que (*n^2 *pair)* $\Longrightarrow$ *(n pair) , nous allons montrer sa contraposée*

$$(n \text{ impair}) \Longrightarrow (n^2 \text{ impair}),$$

en effet

$$\begin{aligned} n \text{ impair} &\Longrightarrow n = 2k+1 \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow n^2 = (2k+1)^2 \\ &\Longrightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\Longrightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &\Longrightarrow n^2 = 2k' + 1 \\ &\Longrightarrow n^2 \text{ impair.} \end{aligned}$$

3 Méthode du raisonnement par l'absurde

Pour montrer que R est une proposition vraie on suppose que $\overline{R}$ est vrai et on trouve une certaine contradiction (quelque chôse d'absurde), si la proposition est sous forme d'implication $(R : P \Longrightarrow Q)$ par l'absurde on suppose que sa négation $(\overline{R} : P \wedge \overline{Q})$ est vraie et on trouve une certaine contradicition.

EXEMPLE 16. *Pour* $x \in \mathbb{R}$*, par l'absurde montrer que* $[(x \neq 2) \Longrightarrow (\frac{x+1}{x+2} \neq 1)]$
Sachant que la négation de $[(x \neq 2) \Longrightarrow (\frac{x+1}{x+2} \neq 1)]$ *est* $[(x \neq 2) \wedge (\frac{x+1}{x+2} = 1)]$

Par l'absurde on suppose que la négation de la proposition qu'on veut démontrer est vraie c'est à dire, supposons que

$$[(x \neq 2) \wedge (\frac{x+1}{x+2} = 1)]$$

est vraie.

Or $\frac{x+1}{x+2} = 1 \Longrightarrow x+1 = x+2 \Longrightarrow 1 = 2$ *ce qui est absurde.*
D'où la proposition $[(x \neq 2) \Longrightarrow (\frac{x+1}{x+2} \neq 1)]$ *est démontrée vraie.*

4 Méthode du raisonnement par contre exemple

Pour montrer qu'une proposition est fausse il suffit de donner ce qu'on appelle un contre-exemple c'est à dire un cas particulier pour lequel la proposition est fausse.

EXEMPLE 17. *(n est un nombre pair)*$\Longrightarrow$ *(*$n^2 + 1$ *est pair), fausse car pour* $n = 2$, $4 + 1 = 5$ *n'est pas pair, c'est un contre-exemple.*

5 Méthode du raisonnement par récurence

Pour montrer que $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n(x)$ est vraie on suit les étapes suivantes :

1. On montre que $P(n_0)$ est vraie, (valeur initiale),
2. on suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre n,
3. on montre que $P(n+1)$ est vraie à l'ordre $n+1$.

Alors P est vrai pour tous $n \geq n_0$.

Exemple 18. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :*

$$0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

1. *Pour $n = 0$, on a bien que $0 = \frac{0(0+1)}{2}$,*
2. *on suppose que $0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie,*
3. *on montre que $0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$,*

en effet

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n+1) &= [0 + 1 + 2 + 3 + ... + n] + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2}{2}) \end{aligned}$$

ainsi P est vraie à l'ordre $n+1$ alors $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie.