Solution EMD du cours de TS Licence ELN2 2019/2020

5 pts Sol. Exo. 1 :

On a $s(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ -t+1 & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & si \quad t > 0 \end{cases} \rightarrow réfléchi \;\; s(-t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < -1 \\ t+1 & si \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 0 & si \quad t > 0 \end{cases}$

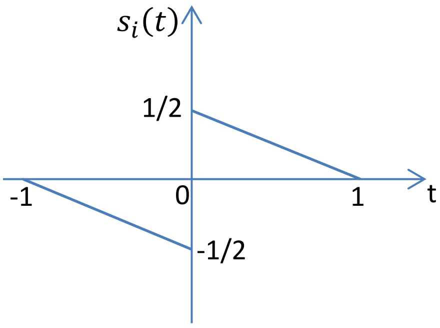
On peut écrire **0.5**

$s(t) = s_p(t) \; + s_i(t)$, $s_p(t)$ *partie paire du signal* $s(t)$ *et* $s_i(t)$ *sa partie impaire.*

$$s_p(t) = \frac{1}{2}(s(t) \; + s(-t)) = \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & t < -1 \\ t+1 & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} = \frac{1}{2}\begin{cases} -|t|+1 & si \;\; |t| \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$ **1.5**

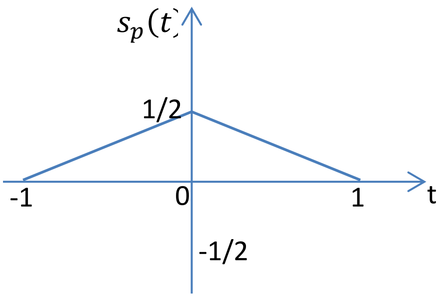
$$s_i(t) = \frac{1}{2}(s(t) - s(-t)) = \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & t < -1 \\ -t-1 & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$ **1.5**

Tracé des graphes de ces signaux :



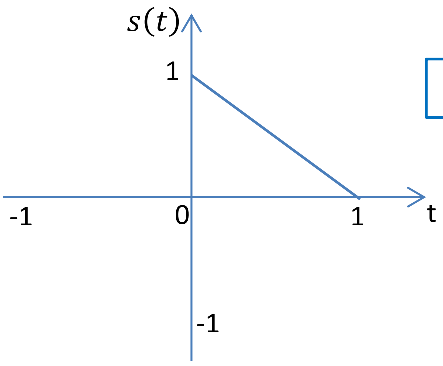
0.5

+

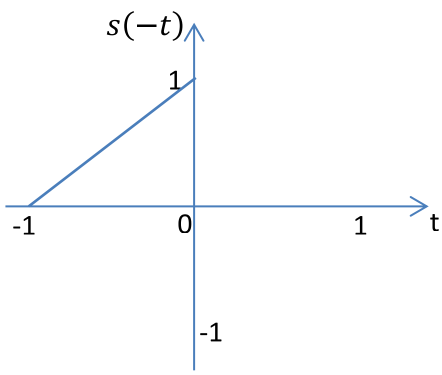


0.5

=

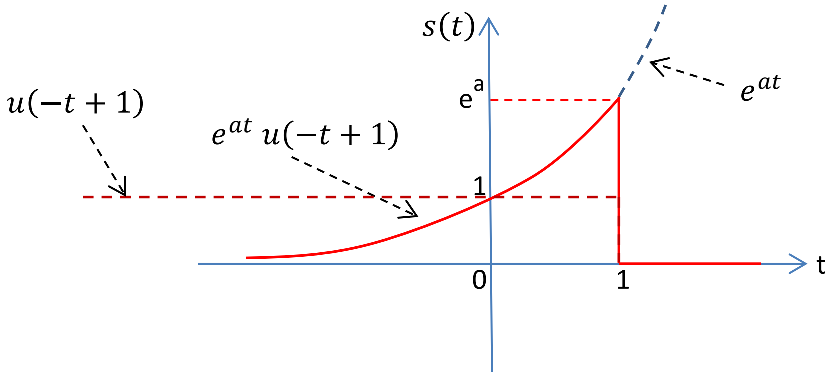


0.5



5 pts Sol. Exo.2 :

$$s(t) = e^{at}\, u(-t+1) \qquad avec\ a > 0$$



3 pts

Calcul de l'énergie totale du signal et sa puissance moyenne totale: **1 pt**

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{at}\, u(-t+1)]^2\, dt = \int_{-\infty}^{1} e^{2at}\, dt = \frac{1}{2a}\, [e^{2at}]_{-\infty}^{1} = \boldsymbol{\frac{e^{2a}}{2a}}$$

$$E_\infty = \frac{e^{2a}}{2a}\ \ finie \ \rightarrow\ P_\infty = \mathbf{0}$$ **1 pt**

5 pts Sol. Exo.3 :

Calcul des coefficients de Fourier $a_n\ et\ b_n$ pour le signal :

$$x(t) = 2\sin\left(\frac{2t}{3} - \pi\right) + 4\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{t}{3} + \pi\right)$$

Sachant que : $\sin(\theta - \pi) = -\sin(\theta)$

$$\cos\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta)$$

$$et\ \cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$$

On peut donc écrire que :

$$x(t) = 2\sin\left(\tfrac{2t}{3} - \pi\right) + 4\cos\left(\tfrac{t}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(\tfrac{t}{3} + \pi\right)$$

1.5

$$x(t) = -2\sin\left(\frac{2t}{3}\right) + 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) - 4\cos\left(\frac{t}{3}\right)$$

$$x(t) = -2\sin\left(\frac{4t}{6}\right) + 4\sin\left(\frac{3t}{6}\right) - 4\cos\left(\frac{2t}{6}\right)$$

$$x(t) = -2\sin\left(4\frac{t}{6}\right) + 4\sin\left(3\frac{t}{6}\right) - 4\cos\left(2\frac{t}{6}\right)$$

$$et\ \ x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\left(n\frac{t}{6}\right) + b_n\sin\left(n\frac{t}{6}\right)$$

Alors par identification des différents coefficients on obtient :

$$a_0 = 0;\quad a_2 = -4\,;\ b_3 = 4\quad et\ b_4 = -2\,; tous\ les\ autres\ coefficients\ sont\ nuls.$$

C'est-à-dire : $a_n = \begin{cases} -4 & pour\ n = 2 \\ 0 & \forall\ n \neq 2 \end{cases}$ **1 pt** $\quad et\ b_n = \begin{cases} 4 & pour\ n = 3 \\ -2 & pour\ n = 4 \\ 0 & \forall\ n \neq 3\ et\ 4 \end{cases}$ **1 pt**

Calcul de la puissance moyenne et la valeur efficace de ce signal :

$P_x = \frac{1}{2}((-2)^2 + (4)^2 + (-4)^2) = \frac{1}{2}(4 + 16 + 16) = 18\ W$ **1 pt**

$et\ I_{eff} = \sqrt{P_x} = 4.243$ **0.5**

5 pts Sol. Exo.4 :

Calcul de la transformée de Fourier du signal $x(t) = e^{-a|t|}\quad avec\ a > 0$.

On applique la définition de la TF :

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-jwt}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-jwt}\,dt$$

$$= \frac{1}{a - jw}e^{(a-jw)t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a + jw}e^{-(a+jw)t}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$X(w) = \frac{1}{a-jw} + \frac{1}{a+jw} = \frac{2a}{a^2+w^2}$$

$$x(t) = \boldsymbol{e^{-a|t|}}\quad avec\ a > 0\ \rightleftharpoons\ X(w) = \frac{\boldsymbol{2a}}{\boldsymbol{a^2 + w^2}}$$ **2 pts**

Par dualité, on en déduit que :

$$s(t) = \frac{1}{2}X(t)_{a=1} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+t^2}} \rightleftharpoons S(w) = 2\pi\ x(w) = 2\pi\frac{1}{2}e^{-|w|}\ =\ \boldsymbol{\pi e^{-|w|}}$$ **1 pt**

Valeur moyenne du signal $s(t)$:

$$s_{moy} = S(0) = \pi\ x(w)|_{\ w=0} =\ \pi e^{-0} = \boldsymbol{\pi}$$ **1 pt**

Calcul de l'énergie totale du signal $s(t) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+t^2}}$:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(w)|^2 \, dw$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\pi e^{-|w|}\right)^2 dw = \pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|w|} \, dw$$

$$= \pi^2 \left[\int_{-\infty}^{0} e^{+2w} \, dw + \int_{0}^{+\infty} e^{-2w} \, dw \right]$$

$$= \pi^2 \left[\frac{1}{2} \, e^{2w} |_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2} \, e^{-2w} |_{0}^{+\infty} \right]$$

$$\boldsymbol{E}_\infty = \pi^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = \boldsymbol{\pi^2}$$

$\boxed{\textbf{1 pt}}$