Université Badji Mokhtar Annaba Année 2019-2020

Faculté des Sciences.

Tronc commun de Mathématiques et Informatique

Examen de Rattrapage (Analyse1)

Exercice 1. (6points)

Trouver le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure s'ils existent des ensembles donnés par :$E_1 = \left\{ x_n = \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} \text{ , } n \in IN^* \right\}, E_2 = \left\{ y_n = \sqrt{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \text{ ; } n \in IN \right\}$.

Exercice 2. (6 points).

I- Montrer que les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacentes.

$$\boldsymbol{U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{n^2} \text{ } et \text{ } V_n = U_n + \frac{2}{n+1}}$$

Que peut-on conclure ?

II- Montrer que la suitede terme général : $U_n = ln(n+1) - ln(n)$ est décroissante.

Exercice 3.(8 points)

I- On considère la fonction : $f(x) = \begin{cases} cos^2(\pi x) & si \ x \leq 1 \\ 1 + \frac{lnx}{x} & si \ x > 1 \end{cases}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f $au \ point \ x = 1$.

II- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ; } n \in IN^*$$

III- Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} sinx$, $\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x^2}$, $\lim_{x\to\pi} \frac{sin^2 x}{1+cosx}$

Bon Courage

Corrigé de l'examen de Rattrapage (Analyse 1).

Exercice n°1 (6 points)

1) $A = \left\{ x_n = \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

- pour $n = 1$; $x_1 = 0$
- On pose : $f(n) = \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

f est croissante et tend vers 1 en $+\infty$, Ainsi ;
$\forall x_n \in A$: $0 \leq x_n < 1$ Ce qui montre que A est un ensemble borné et admet une borne sup et une borne inf. On a : $\inf A = \min A = 0 \in A$. (1pt) (1pt)

$\sup A = 1 \notin A$; $\max A \nexists$. (1pt)

2) $B = \left\{ y_n = \sqrt{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

- Pour $n = 0$, $y_0 = 2$ et quand $n \to +\infty$; $y_n \to \sqrt{3}$.

ainsi : $\forall y_n \in B$: $\sqrt{3} < y_n \leq 2$ ainsi B est borné et (1pt) $\exists \sup B$, $\exists \inf B$. et on a ; $\sup B = \max B = 2$ (1pt)

$\inf B = \sqrt{3} \notin A$; $\min B \nexists$. (1pt)

Exercice n°2

1) On a ; $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, $V_n = U_n + \frac{2}{n+1}$

Montrons que (U_n) et (V_n) sont adjacentes :

1 - On a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, (U_n) est donc croissante. (1pt)

2 - On a ; $V_{n+1} - V_n = \left(U_{n+1} + \dfrac{2}{n+2}\right) - \left(U_n + \dfrac{2}{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{-n}{(n+2)(n+1)^2} < 0$$

(V_n) est donc décroissante (1pt)

3 - On a $V_n - U_n = \frac{2}{n+1} \geq 0$ donc : $V_n \geq U_n$, $\forall n \geq 1$ (0

4 - On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$. (0,5)

Par conséquent, les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes et elle convergent alors vers une même limite ℓ. (1p

2) Montrons que la suite de terme général :

$U_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ est décroissante

on a : $U_{n+1} - U_n = [\ln(n+2) - \ln(n+1)] - [\ln(n+1) - \ln(n)]$.

$$= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left[\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right] < 0 \text{ car : } \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1.$$

(2pts

donc la suite (U_n) est décroissante.

Exercice n°3

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(\pi x) & x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x} & x > 1. \end{cases}$$

I. la continuité de f au point $x_0 = 1$.

on a : • $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \cos^2 \pi x = 1$. (0,5)

• $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1$ (0,5)

• $f(1) = 1$.

ainsi, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = f(1)$, f est donc continue en 1. (0,5

* La dérivabilité de f au point $x_0 = 1$.

on a : • $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cos^2 \pi x - 1}{x - 1} \overset{R.H}{=}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\pi . 2\cos(\pi x)(-\sin \pi x)}{1} = 0$ (0,5)

• $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{1+\frac{\ln x}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{\ln x}{x}}{x-1}$

$\overset{R.H}{=} 1.$ (0,5)

on déduit que f n'est pas dérivable en 1. (0,5)

II. On applique le théorème des Accroissements finis à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[n, n+1], n>0$

il est clair que la fonction f est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ ainsi:

$\exists c \in]n, n+1[$ tel que: $f(n+1) - f(n) = (n+1-n) f'(c)$

ce qui donne: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$ (2pts)

comme: $n < c < n+1$, alors $\sqrt{n} < \sqrt{c} < \sqrt{n+1}$

ainsi: $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{2\sqrt{c}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

on déduit donc que: $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n>0$

III. • $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin x}_{\text{bornée}} = 0$ (1pt)

• $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2x^2} = \dfrac{0}{0}$ F.I.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left[2\sqrt{1+x} - (2+x)\right]\left[2\sqrt{1+x} + 2 + x\right]}{2x^2\left[2\sqrt{1+x} + 2 - x\right]}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^2}{2x^2\left[2\sqrt{1+x} + 2 + x\right]} = -\dfrac{1}{8}.$ (1pt)

• $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \dfrac{0}{0}$ F.I. ; $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}$

$= \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = \lim\limits_{x \to \pi} (1-\cos x) = 2.$ (1pt)