Solution de l'examen (EDP) ①

Ex 1. (6) 1. $a : V \times V \to \mathbb{R}$ $\quad$ (V s.e. fermé de $H^1(a,b)$)

2 a bornée :

$$a(u,v) = \int_a^b \left(|v'|^2 + c\,|u|^2 \right) dx + \alpha\, |v(b)|^2$$

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + c_+ \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \alpha\, |v(b)|^2$$

$$v(x) = \int_a^x v'(t)\,dt \Rightarrow |v(x)| \leq \sqrt{b-a}\, \|u'\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow |v(b)| \leq \sqrt{b-a}\, \|u'\|_{L^2}, \quad \|v\|_{L^2} \leq (b-a)^{3/2} \|u'\|_{L^2}$$

$$c_+ = \max c(x)$$

$$\Rightarrow |a(u,v)| \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

3 a est coercive : $\quad (c \geq 0,\ \alpha \geq 0)$

$$a(v,v) \geq \int_a^b |v'|^2\, dx \geq \gamma \|v\|^2_{H^1}$$

$$\gamma = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{b-a}}{2} \right)$$

1 $L(v) = \int_a^b f\, v\, dx, \Rightarrow \|L\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_{L^2}$

Lax-Milgram $\Rightarrow$ Il existe une sol. unique $u \in V$.

(4) 2 - 2 $-D^2u + cu = f \Rightarrow D^2 u \in L^2 \Rightarrow u \in H^2(I)$

La formulation variationnelle entraîne

$$\int_a^b u' v'\, dx = -\int u'' v\, dx + u'(b)v(b)$$

$$\forall v \in V \xRightarrow{v(b)=1} u'(b) = \alpha u(b)$$

$$\Rightarrow \alpha u(b) v(b) - u'(b) v(b) = 0$$

2 u est sol de $\begin{cases} -u'' + cu = f, & x \in (a,b) \\ u(a) = 0, \quad u'(b) = \alpha u(b) \end{cases}$

Ex 2. (1) 4. $V = H^1_0(\Omega)$

$$a(u,v) = \int_\Omega [\nabla u \nabla v + p u v + \lambda u v]\, dx$$

$$L(v) = \int_\Omega f_p v\, dx$$

$P \Rightarrow P_v$: on multiplie l'équation par $v \in V$ et on intègre sur Ω :

$$-\int_\Omega (\Delta u) v\, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \underset{0}{\cancel{v}}\, ds$$

$\Rightarrow u$ satisfait (P_v)

inversement $P_v \Rightarrow P$. Suppo. $u \in H^2 \cap H^1_0$, vérifie (P_v)

Soit $\varphi \in D(\Omega)$, alors

$$a(u,\varphi) = +\int_\Omega [-u \Delta\varphi + (p+\lambda) u \varphi]\, dx = \int_\Omega f \varphi\, dx$$

$\Rightarrow -\Delta u + (p+\lambda) u = f$ au sens de D'

$\Rightarrow -\Delta u + (p+\lambda) u = f$ p.p. $x \in \Omega$ et $u/_\Gamma = 0$

(2) 4 a bornée :

- $|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + (|\lambda| + p_+) \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$ $\quad p_+ = \max |p(x)|$

$\leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$

- L continue. $|L(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$

- Coercivité :

$a(v,v) \geq \|\nabla v\|^2_{L^2} + (p_- + \lambda) \|v\|^2_{L^2}$ $\quad p_- = \min p(x)$

Si $\lambda + p_- > 0 \Rightarrow a(v,v) \geq \min(1, \lambda + p_-) \|v\|^2_{H^1}$ $\quad (\lambda_0 = -p_-)$

(3) 2 Si Ω régulier $\Rightarrow u \in H^2$ (Th. de régularité)