

Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Polycopié du cours

Mathématiques pour architecture

Abdourazek Souahi

<https://sites.google.com/view/archi1maths/>

1^{ère} année licence

2019 – 2020

« ... Louange à Allah qui nous a guidés à ceci.

Nous n'aurions pas été guidés,

si Allah ne nous avait pas guidés.

Les messagers de notre Seigneur

sont venus avec la vérité ... »

Table des matières

Canevas officiel	1
Introduction	2
1 Les principaux théorèmes de la géométrie euclidienne	3
1.1 Définitions	3
1.2 Objets de la géométrie	4
1.3 Règles importantes	5
1.3.1 Règles pour les définitions	5
1.3.2 Règles pour les axiomes	5
1.3.3 Règles de démonstration	6
1.4 Postulats d'Euclide	6
1.5 Axiomes de Hilbert	7
1.5.1 Axiomes d'association	7
1.5.2 Axiomes d'ordre	7
1.5.3 Axiomes de congruence	8
1.5.4 Axiomes de continuité	8
1.5.5 Axiome des parallèles	8
1.6 Quelques théorèmes	10
1.6.1 Triangles égaux	10
1.6.2 Théorème de Pythagore	16
1.6.3 Théorème des lignes proportionnelles	21
1.7 Constructions à la règle et au compas	24
1.7.1 Principe et conditions de la construction	24
1.7.2 Les nombres constructibles	25
2 Trigonométrie et cercle	28
2.1 Définitions	28
2.2 Le cercle trigonométrique	29

2.3	Relations remarquables	30
2.3.1	Formules d'addition	30
2.3.2	Formules d'addition bis	31
2.3.3	Formules de produit-somme	31
2.3.4	Formules de somme-produit	31
3	Polygones et Polyèdres	32
3.1	Figures et quadriques	32
3.1.1	Le cercle	32
3.1.2	Le cylindre	34
3.1.3	La sphère	35
3.1.4	L'ellipsoïde	35
3.1.5	Le cône de révolution	35
3.1.6	Le parabolôïde	37
3.1.7	L'hyperboloïde	37
3.1.8	L'ovoïde	37
3.1.9	Autres formes	38
3.2	Polygones	39
3.2.1	Construction des polygones	41
3.2.2	Propriétés	43
3.2.3	Pavage du plan avec un polygone régulier	43
3.3	Polyèdres, prismes et polyèdres étoilés	44
3.3.1	Solides de Platon	44
3.3.2	D'autres polyèdres	46
3.4	Les polyèdres archimédiens	47
4	Systèmes de coordonnées	49
4.1	Repérage sur un axe	49
4.2	Repérage sur un plan	50
4.2.1	Système de coordonnées cartésiennes	50
4.2.2	Système de coordonnées polaires	50
4.3	Repérage dans l'espace euclidien	51
4.3.1	Système de coordonnées cartésiennes	51
4.3.2	Système de coordonnées cylindriques	51
4.3.3	Système de coordonnées sphériques	52
4.4	Questions et réponses	53

4.4.1	L'ellipsoïde	54
4.5	Coordonnées géographiques	57
4.5.1	Le géoïde	59
5	Transformations isométriques	62
5.1	Transformations isométriques	62
5.1.1	Identité	63
5.1.2	Déplacements et antidéplacements	63
5.1.3	Réflexion	63
5.1.4	Rotation	64
5.1.5	Symétrie centrale	66
5.1.6	Translation	66
5.1.7	Symétrie glissée	67
5.2	Expression analytique des isométries	69
5.2.1	Expression de l'identité	70
5.2.2	Expression de translation	70
5.2.3	Expression de rotation	70
5.2.4	Expression de réflexion	71
5.2.5	Expression de symétrie	72
6	Matrices et transformations	73
6.1	Points et vecteurs	73
6.2	Matrices	74
6.3	Matrices particulières	75
6.3.1	Matrices colonnes	75
6.3.2	Matrices lignes	75
6.3.3	Matrices carrées	75
6.3.4	Matrice identité	75
6.3.5	Matrice nulle	75
6.4	Calcul matriciel	76
6.4.1	Egalité de matrices	76
6.4.2	Addition de matrices	76
6.4.3	Produit d'une matrice par un nombre réel	76
6.4.4	Produit de deux matrices	77
6.5	Déterminant de matrice	78
6.6	Matrice inverse	78

6.7	Applications linéaires/affines et matrices	79
6.7.1	Matrice d'une application	80
6.7.2	Matrice de rotation	81
6.7.3	Matrice de symétrie centrale	81
6.7.4	Matrice de réflexion	81
6.7.5	Matrice de translation ?	82
6.8	Transformations et coordonnées homogènes	82
6.8.1	Matrice de translation	82
6.8.2	Matrices des transformations affines	83
6.8.3	Caractérisation des applications isométriques	84
6.8.4	Composition de transformations	84
6.9	Applications des matrices et des transformations	85
6.9.1	Frises	85
6.9.2	Pavage	88
6.9.3	G.I.S.	88
6.9.4	G.P.S.	88
	Bibliographie	90
	Examen 2018-2019	92
	Examen 2019-2020	93

Canevas officiel

Semestre 1	
Unité d'enseignement	UET 1
Matière	Mathématiques
Coefficient	1
Crédit	1

L'objectif de l'enseignement des mathématiques est de recentrer le rôle de cette science est plus particulièrement de la géométrie dans la formation de l'étudiant en architecture. Le programme permet à l'étudiant l'acquisition des outils de base permettant de formuler, de représenter et de calculer les formes et/ou les espaces que l'étudiant est à même d'imaginer.

Contenu de la matière

1. Les principaux théorèmes de la géométrie euclidienne.
2. Rappels de trigonométrie.
3. Les différents systèmes de coordonnées 2D et 3D
4. Propriétés métriques des figures géométriques élémentaires
5. Étude et construction géométrique des polygones réguliers
6. Les transformations isométriques 2D.
7. Rappel sur les polygones réguliers ; étude et construction géométrique des polyèdres platoniciens.
8. Géométrie et calcul vectoriel.
9. Les matrices

Mode d'évaluation :

100% examen

Références :

- ROUSSEAU Erwan, *Géométrie et arithmétique*, 2015
- DERRARDJIA Ishak, *Derrardjia.ishak.com*

Introduction

Ce module est centré sur la géométrie euclidienne et les matrices.

Les chapitres de la première partie sont consacrés à la construction logique ou axiomatique de la géométrie euclidienne. On introduit quelques théorèmes importants et quelques-unes de leurs applications. On enchaîne par des rappels en trigonométrie, en particulier des relations et des identités remarquables. On aborde par la suite les différents systèmes de coordonnées du plan et de l'espace. On revient ensuite vers les figures géométriques élémentaires pour construire et étudier les propriétés métriques de celles qui ont une certaine régularité et symétrie.

Dans la seconde partie, on voit le calcul des matrices. D'abord, on va définir les transformations isométriques dans le plan. On fait un lien entre le calcul vectoriel abstrait et la géométrie, puis on termine ce polycopié par quelques notions élémentaires sur les matrices carrées.

On a opté pour une version légère de ce polycopié qui permet néanmoins d'avoir une vue générale du sujet. Cependant, on a inclus beaucoup d'exemples concrets pour l'architecture, moderne ou ancienne. Ceci va permettre aux étudiants de réfléchir aux questions posées et de comprendre les notions mathématiques et les explications apportées en cours relatives aux questions de ce manuscrit.

En fait, il est difficile de trouver un livre qui couvre au moins une partie du module enseigné, même au département de mathématiques. Les ouvrages traitant les chapitres de ce cours sont assez techniques pour les étudiants de 1^{ère} année qui ne vont pas se spécialiser en mathématiques. inputthesisparts/intro

Les principaux théorèmes de la géométrie euclidienne

Géométrie veut dire « mesure des terres ». S'étant développée pour les problèmes de construction, elle englobe, aujourd'hui, plusieurs branches des mathématiques. Il est difficile de définir ce qu'elle est devenue.

En général, elle englobe principalement la géométrie euclidienne, affine, projective et non euclidienne. Nous étudions en mathématiques différentes autres branches telles que la topologie, la géométrie différentielle, etc. Néanmoins, ce qui intéresse un architecte c'est la géométrie euclidienne qui est l'étude de l'espace usuel avec les notions de distance et d'angle.

Pour construire et étudier la géométrie, il existe différentes façons. Au département de mathématiques, elle est basée sur l'algèbre linéaire et la topologie ainsi qu'une partie de l'analyse. Pour les étudiants d'architecture, il est plus commode d'utiliser l'approche axiomatique ou synthétique qui a comme données des objets élémentaires ainsi que des relations qui les gouvernent et des grandeurs qui leurs sont associées.

1.1 Définitions

- Une proposition consiste en une hypothèse et une conclusion.
- Une proposition réciproque est énoncée en prenant la conclusion de la proposition directe comme hypothèse et son hypothèse comme conclusion.
- Un axiome est une proposition évidente par elle-même.

- Un théorème est une proposition qui doit être démontrée.
- Un lemme est une proposition préliminaire dont la démonstration facilite celle d'un théorème conséquent.
- Un corollaire est une conséquence immédiate d'un théorème.

1.2 Objets de la géométrie

Les définitions qui suivent sont données d'une façon simple et compréhensible sans pour autant être rigoureuse.

Volume : Un corps occupe un certain volume lorsqu'il prend dans l'espace à trois dimensions une certaine place.

Surface : Un volume est délimité par une surface. Le volume est mesurable physiquement contrairement à la surface qui n'a pas d'épaisseur et qui est une notion abstraite. On dit aussi que physiquement la surface a une épaisseur qui soit négligeable, c'est-à-dire aussi petite que l'on veut.

Ligne : Une surface est délimitée par une ligne courbe.

Droite : Une droite est définie comme la ligne de plus court chemin joignant deux points sur une surface. Cette définition est en réalité celle de géodésique. Mais, elle coïncide avec la droite pour la géométrie euclidienne, pour plus de détails voir le postulat n°5 d'Euclide.

Point : C'est l'intersection entre deux fils tendus ou une ligne aussi petite que l'on veut.

Le point est une notion purement abstraite. Elle est approchée par une ligne sans épaisseur ni longueur ni largeur.

Remarque 1.1

Un point dans son mouvement engendre ou trace une ligne, une ligne engendre une surface, une surface engendre alors un volume.

Plan : Une surface indéfinie, telle que toute droite joignant deux points de celle-ci, y est entièrement contenue.

Angle : Portion du plan définie par l'intersection de deux demi-droites.

Figure : Tout ensemble formé de points, de lignes, de surface ou de volumes.

Egalité : Deux figures sont égales si et seulement si elles représentent la même figure en deux endroits différents, c'est-à-dire égalité par superposition, c'est ce qu'utilisa Euclide dans ses « Eléments » pour parler d'égalité sans pour autant définir une distance.

Mesurer : Mesurer des grandeurs de même espèce est le fait de les comparer ou de faire le rapport avec une grandeur de même espèce que l'on prend comme unité de mesure.

Equidistant : Deux objets sont équidistants par rapport à un autre si la distance mesurée entre chacune et ce troisième est la même. Equidistant veut dire à distance égale.

Circonférence : Ensemble de points d'un plan équidistants à un point donné appelé centre.

Corde : Segment de droite d'extrémité deux points de même circonférence.

Arc de cercle : Portion de circonférence comprise dans un des demi-plans déterminés par la droite définie par la corde.

Parallèles : Deux lignes sont parallèles si elles sont également distantes l'une de l'autre sur toute leur longueur.

1.3 Règles importantes

On établit les règles suivantes qu'on va suivre tout au long de ce cours.

1.3.1 Règles pour les définitions

- N'admettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques sans définitions.
- N'employer dans les définitions que des termes parfaitement connus ou déjà expliqués.

1.3.2 Règles pour les axiomes

- Ne demander en axiomes que les choses parfaitement évidentes.

1.3.3 Règles de démonstration

- Prouver toutes les propositions, en n'employant à leur preuve que des axiomes très évidents eux-mêmes ou des propositions déjà montrées ou accordées.
- N'abuser jamais de l'équivoque des termes, en manquant de substituer mentalement les définitions qui les renseignent ou les expliquent.

La géométrie est l'étude des figures de l'espace et les relations entre elles. En particulier, on étudie les positions spatiales respectives de ses éléments entre eux et de leurs mesures. Elle n'exige pour sa construction logique qu'un petit nombre de principes fondamentaux simples, évidents, compatibles et non contradictoires. Du point de vue de rigueur, la construction faite par Euclide dans ses « Eléments » qui date vers 300 ans av. J.-C. nécessite d'autres hypothèses supplémentaires. C'est au 19^e siècle, que Hilbert établit un système d'une vingtaine d'axiomes indépendants évidents et non contradictoires, réparti en cinq groupes. Ces derniers sont centrés sur les relations entre les objets de la géométrie désignées par des mots tels que « sont situés », « entre », « parallèle », « congruent » et « continue ».

1.4 Postulats d'Euclide

Euclide pose ses fameux postulats, dont le dernier est resté *le* postulat d'Euclide ou *l'axiome des parallèles*. La traduction des postulats varie selon les siècles et on se contente ici d'une des plus simples.

1. Etant donnés deux points A et B , il existe une droite passant par A et B .
2. Tout segment de droite $[AB]$ est prolongeable en une droite passant par A et B .
3. Pour tout point A et tout point B distinct de A , on peut décrire un cercle de centre A passant par B .
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Par un point extérieur à une droite, on peut mener une parallèle et une seule à cette droite.

1.5 Axiomes de Hilbert

1.5.1 Axiomes d'association

1. Soient deux points, il existe une droite passant par ces deux points (Existence de la droite).
2. Soient deux points, il n'existe qu'une unique droite passant par ces deux points (Unicité de la droite).
3. Une droite contient au moins deux points, et pour une droite donnée, il existe au moins un point non contenu dans la droite.
4. Soient trois points non contenus dans une droite, il existe un plan contenant ces trois points. Tout plan contient au moins un point (Existence de plan).
5. Soient trois points non contenus dans une droite, il n'existe qu'un unique plan contenant ces trois points (Unicité du plan).
6. Soient deux points contenus dans une droite D et dans un plan A , alors A contient tous les points de D .
7. Si deux plans A et B contiennent tous deux un point C , alors l'intersection de A et B contient au moins un autre point.
8. Il existe au moins quatre points non coplanaires (Coplanaire = sur le même plan).

1.5.2 Axiomes d'ordre

1. Si un point B est entre les points A et C , B est aussi entre les points C et A , et il existe une droite contenant les trois points A, B, C .
2. Soient deux points A et C , il existe un point B élément de la droite AC tel que C se situe entre A et B .
3. Soient trois points contenus dans une droite, alors un et un seul se situe entre les deux autres.
4. ("Axiome de Pasch") Soient trois points A, B, C non colinéaires, et soit une droite D contenue dans le plan ABC mais ne contenant aucun des points A, B, C : Si D contient un point du segment AB , alors D contient aussi soit un point du segment AC soit un point du segment BC .

1.5.3 Axiomes de congruence

Remarque 1.2

Intuitivement "congruent" signifie en géométrie "superposable".

1. Soient deux points A, B et un point A' élément d'une droite d , il existe deux et deux uniques points C et D , tel que A' se situe entre C et D , et AB est congru à $A'C$ et AB est congru à $A'D$.
2. La relation de congruence est transitive, c'est-à-dire : si AB est congru à CD et si CD est congru à EF , alors AB est congru à EF .
3. Soit une droite d contenant les segments adjacents $[AB]$ et $[BC]$ et soit une droite d' contenant les segments adjacents $[A'B']$ and $[B'C']$. Si $[AB]$ est congru à $[A'B']$ et $[BC]$ est congru à $[B'C']$ alors $[AC]$ est congru à $[A'C']$.
4. Soit un angle ABC et une demi-droite $B'C'$, il existe deux et seulement deux demi-droites, $B'D$ et $B'E$, tels que l'angle $DB'C'$ est congru à l'angle ABC et l'angle $EB'C'$ est congru à l'angle ABC .
5. Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que AB est congru à $A'B'$, AC est congru à $A'C'$ et l'angle BAC est congru à l'angle $B'A'C'$, alors le triangle ABC est congru au triangle $A'B'C'$.

Corollaire 1.3

Tout angle est congru à lui-même.

1.5.4 Axiomes de continuité

1. ("Axiome d'Archimède")
2. ("Axiome de Cantor")

Remarque 1.4

Ces axiomes permettent d'établir une correspondance entre les points d'une droite et l'ensemble des nombres réels.

1.5.5 Axiome des parallèles

1. Soient d une droite et P un point n'appartenant pas à d . Il passe une et une seule droite d' par P qui soit parallèle à d .

Autre formulation équivalente :

Soient une droite d et un point P non inclus dans d , alors il existe un plan contenant d et P . Ce plan contient une et une unique droite contenant P et ne contenant aucun point de d .

Remarque 1.5

Ce dernier est le cinquième postulat d'Euclide. On estime qu'il est le plus important mais ne peut être considéré comme un axiome car il n'est pas utilisé dans les autres géométries, comme les géométries hyperbolique, elliptique et sphérique. Ces dernières sont des variantes de la géométrie euclidienne et n'en diffèrent que par la modification de ce dernier axiome. Elles sont contraires à l'intuition usuelle puisque la ligne de plus court chemin n'est pas la droite en général. On dit que ces géométries possèdent une courbure non nulle.

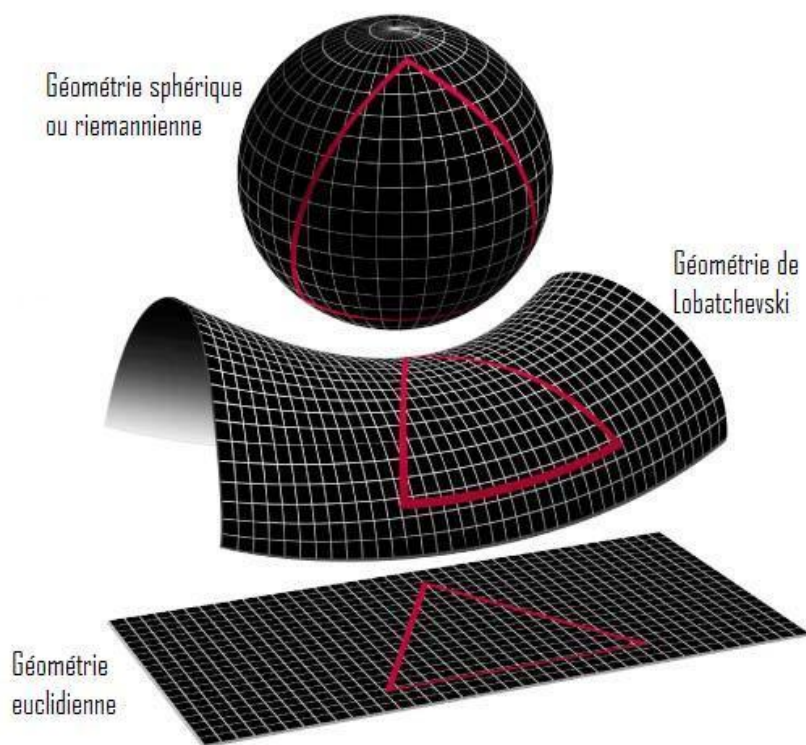


FIGURE 1.1 – Exemples de géométries

La surface de la terre est considérée comme une sphère, c'est-à-dire qu'elle a une courbure sur cette surface. La distance la plus courte n'est plus la ligne droite, voir Figure 1.1¹.

¹Source : <http://logiqueformelle.free.fr/>

La projection suivante de la terre (Figure 1.2a) ne conserve pas les distances et les angles, du moins en partie. En réalité, le plus court chemin est celui du plus grand cercle qu'on dessine sur la « sphère » représentant la terre comme à la Figure 1.2b.

Remarque 1.6

Les deux figures 1.2a et 1.2b permettent de bien visualiser les longueurs. Nous devons prendre la courbure de la terre en considération.²

Remarque 1.7

En géométrie euclidienne, l'étude de tout objet est présumé être à trois dimensions. Par contre, dans d'autres géométries, la surface courbée est elle-même considérée comme surface à deux dimensions. C'est l'analogue du plan pour la géométrie euclidienne. En outre, le plan sera considéré comme une surface de l'espace de cette dite géométrie.

Dans ce qui suit, on propose quelques théorèmes connus qui découlent des axiomes précédents.

1.6 Quelques théorèmes

Théorème 1.8

- *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*
- *Deux angles opposés par le sommet ont une même bissectrice.*
- *Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont rectangulaires.*
- *Les bissectrices des angles formés par deux sécantes sont deux droites rectangulaires (à angle droit).*

Exercice 1.9

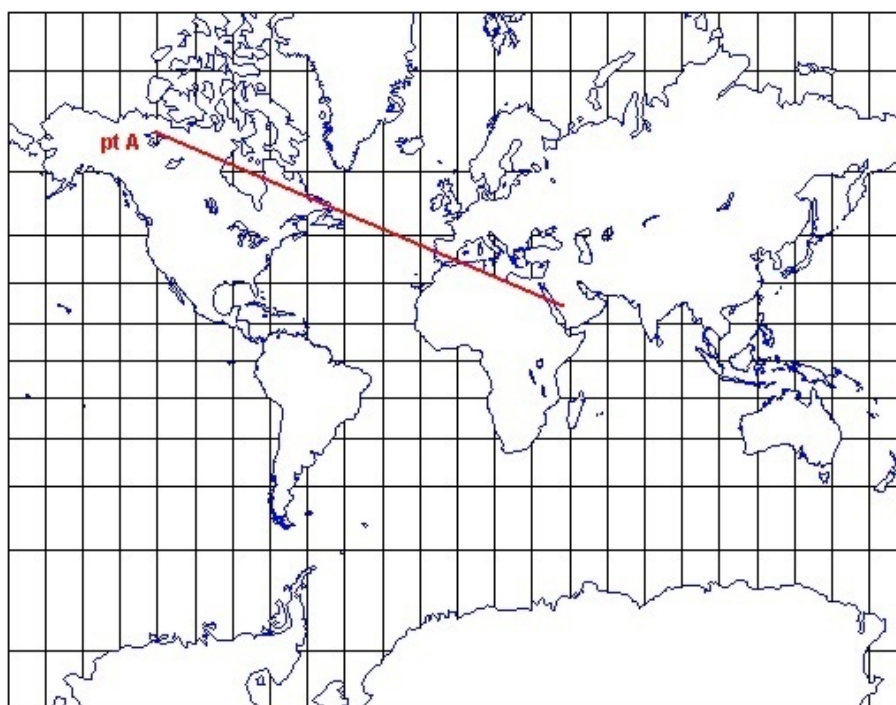
Démontrer le théorème précédent, en utilisant les axiomes de la section précédente.

1.6.1 Triangles égaux

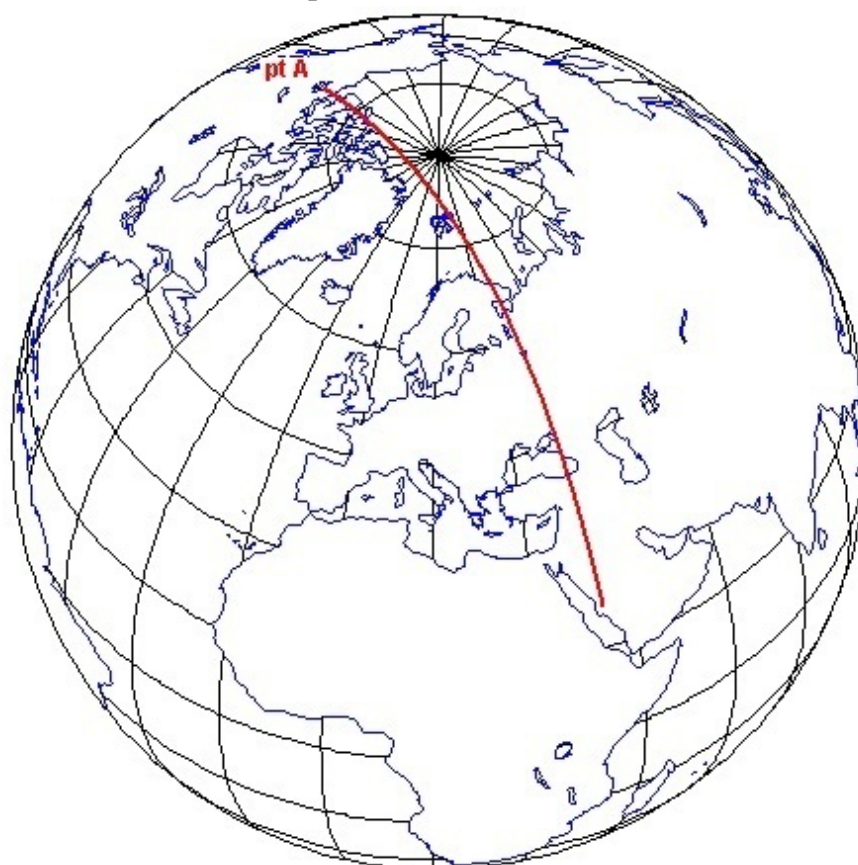
Définition 1.10

Deux triangles sont dits "triangles égaux" lorsque, par déplacement, retournement ou les deux combinés, on superpose tous les sommets du premier triangle au deuxième. Nous disons alors aussi que les triangles sont des "triangles homologues" ou "triangles isométriques".

²Ces figures viennent du site : <https://www.qiblalocator.com/>



(a) Le plus court chemin ? Non.



(b) Le plus court chemin ? Oui.

FIGURE 1.2 – Les chemins à la surface de la terre

De cette définition et des axiomes d'association et de distribution, nous formulons ce théorème.

Théorème 1.11

Deux triangles sont égaux lorsque soit :

- *Ils ont un côté égal et deux angles égaux.*
- *Ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur.*

Maintenant, des théorèmes précédents nous démontrons le théorème des angles alternes-internes et angles alternes-externes.

Théorème 1.12

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante :

- *Les angles alternes-internes sont égaux.*
- *Les angles alternes-externes sont égaux.*
- *Les angles correspondants sont égaux.*

Preuve 1.13

Soient deux parallèles AB et CD et la sécante EF , voir Figure 1.3.

Par le milieu O de EF , menons la perpendiculaire GH à AB qui est aussi perpendiculaire à CD .

Les triangles rectangles EOG et FOH ont des angles aigus $E\hat{O}G$ et $F\hat{O}H$ égaux, et des hypoténuse OF et OE égales.

Donc, les triangles sont égaux. On déduit que les angles $O\hat{E}G$ et $O\hat{F}H$ sont égaux.

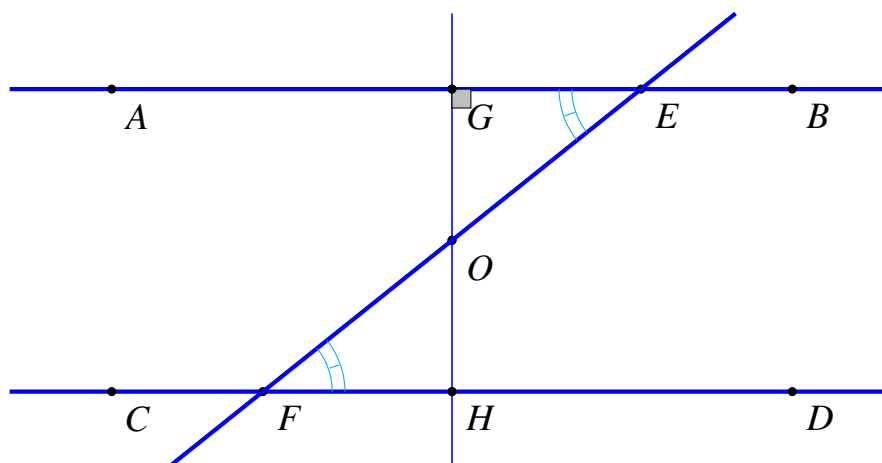


FIGURE 1.3 – Angles alternes-internes

Corollaire 1.14 (Somme des angles du triangle)

La somme des angles d'un triangle plan est toujours égale à 180° (ou π radians).

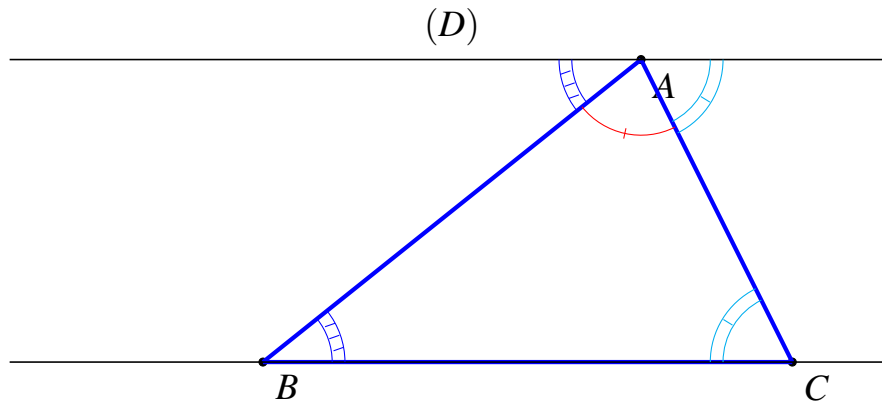


FIGURE 1.4 – Somme des angles du triangle

Exercice 1.15

Utiliser la Figure 1.4 et les résultats précédents pour démontrer le Corollaire 1.14

Exemple 1.16

Eratosthenes³ a calculé le rayon de la terre, voir Figure 1.5. Bien que le calcul soit fait dans une autre unité, à savoir le stade, et malgré que sa traduction pose quelques problèmes, on remarque que l'utilisation de la géométrie et quelques observations des ombres permet d'obtenir beaucoup de résultats intéressants.

Exercice 1.17

Expliquer d'une façon géométrique simple les étapes de calcul utilisé par Eratosthenes pour trouver le rayon de la terre.

Exemple 1.18

Une des applications du théorème précédent est l'architecture gothique. Sur un trapèze isocèle, on construit deux autres comme sur la figure ci-dessous. Après une rotation et en utilisant les angles alternes-internes, les nouveaux trapèzes s'accolent au premier. On continue la construction de la voûte plate, voir les figures ci-dessous.

Réflexion 1.19

- Pourquoi dans la construction gothique nous avons besoin de voûtes et claveaux ? N'est-il pas plus facile d'utiliser une autre forme comme celle du point suivant ?
- Comment l'architecte Walter Gropius a pu construire la nouvelle porte de l'université de Baghdad aux années 1960 ? Voir Figure 1.9a et Figure 1.9b ci-dessous.

³Aux alentours de l'an 200 avant av. J.-C., des voyageurs dirent à Eratosthenes, géomètre de l'école d'Alexandrie, ..., voir toute l'histoire sur le site. Son portrait est donné dans 1.6

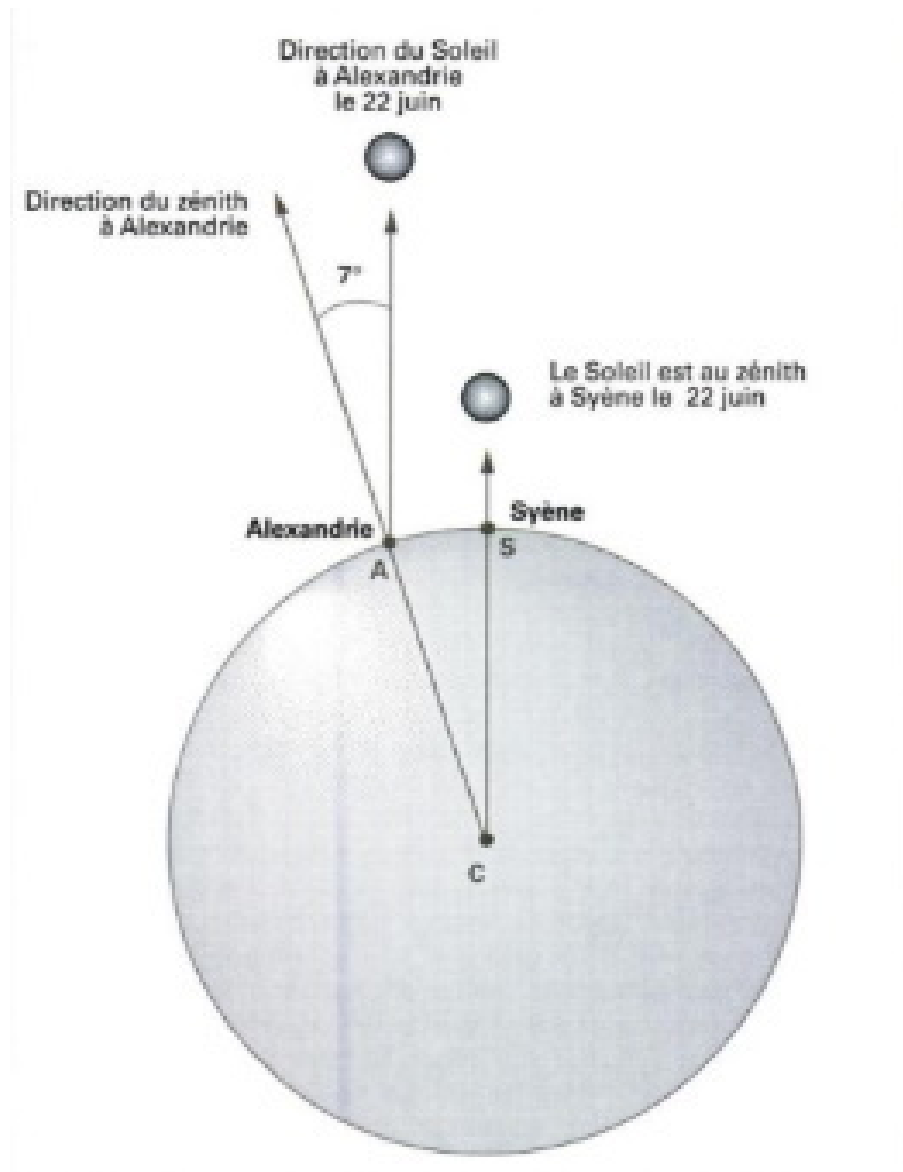


FIGURE 1.5 – Une des méthodes de calcul du rayon de la terre



FIGURE 1.6 – Eratosthenes

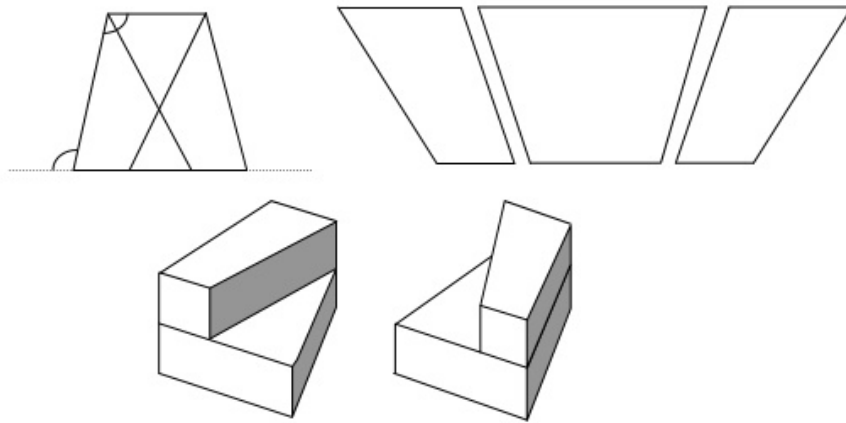


FIGURE 1.7 – Fabrication des claveaux

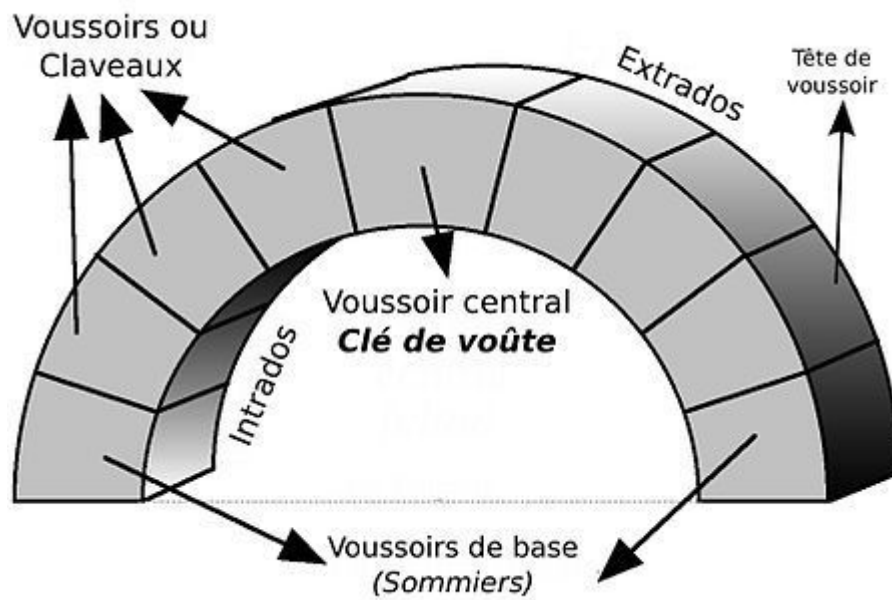


FIGURE 1.8 – Une construction gothique



(a)



(b)

FIGURE 1.9 – Porte de l'université de Baghdad.

1.6.2 Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore et sa réciproque sont des outils anciens utilisés par les artisans et les architectes depuis la nuit des temps.

Théorème 1.20

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse, soit le côté opposé à l'angle droit, est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Exercice 1.21

Démontrer le théorème en utilisant les notions précédentes.

Dans un triangle ABC rectangle en C , AB étant l'hypoténuse, où $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ (cf. figure ci-dessous), on aura donc : $BC^2 + AC^2 = AB^2$ ou encore $a^2 + b^2 = c^2$, voir Figure 1.10.

Le théorème de Pythagore permet ainsi de calculer la longueur d'un des côtés d'un triangle rectangle si on connaît les deux autres.

La réciproque du théorème de Pythagore est également vraie :

Théorème 1.22 (Réciproque du théorème de Pythagore)

Si dans un triangle, la somme des carrés de deux côtés est égale au carré du plus grand côté, alors ce triangle est rectangle.

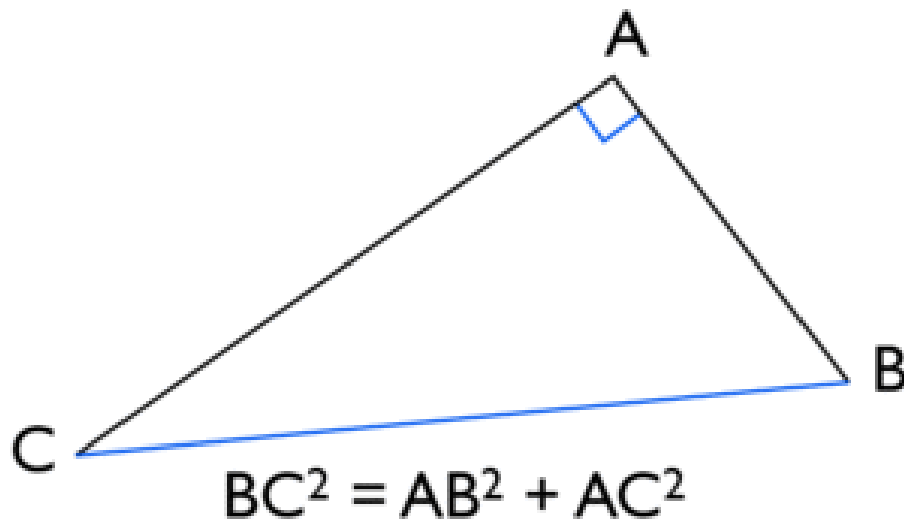


FIGURE 1.10 – Triangle rectangle

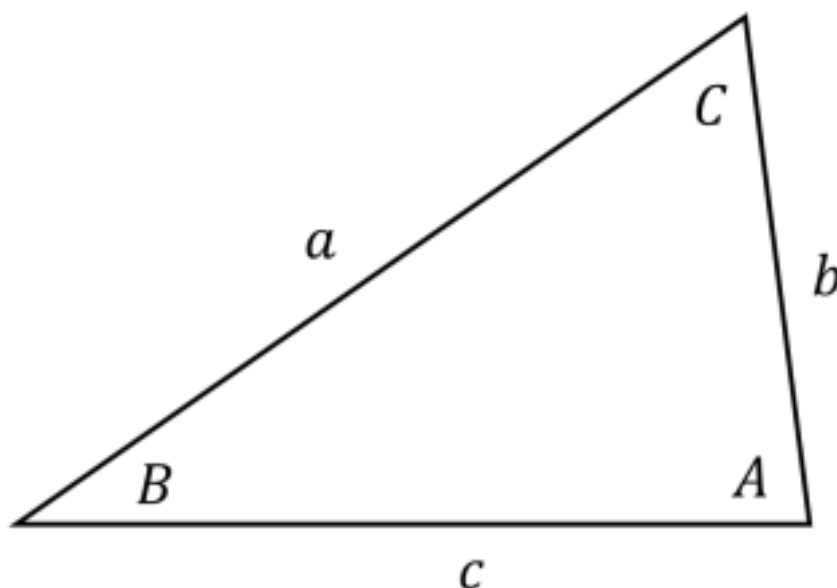
Le théorème de Pythagore est donc une propriété caractéristique des triangles rectangles. Formulé autrement, si dans un triangle ABC on a $BC^2 + AC^2 = AB^2$, alors ce triangle est rectangle en C .

Une forme plus générale du théorème de Pythagore est la formule d'Al-Kashi, ou loi des cosinus. Elle est valable dans tout triangle ABC et relie la longueur des côtés en utilisant le cosinus d'un des angles du triangle.

Théorème 1.23 (d'Al-Kaschi)

Dans tout triangle ABC la relation suivante est vraie

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}).$$



Conséquences et applications

Quelques unes des applications du théorème de Pythagore sont les suivantes.

Exercice 1.24 (Construction de racines de nombres et mesures)

Dans les sections suivantes, nous allons discuter des conditions, pour faire ce genre de construction. Pour cet exercice, nous construisons seulement la racine carrée d'un nombre donné.

Question : Calculer la hauteur au point A du triangle ABC en fonction de x de la Figure 1.11.

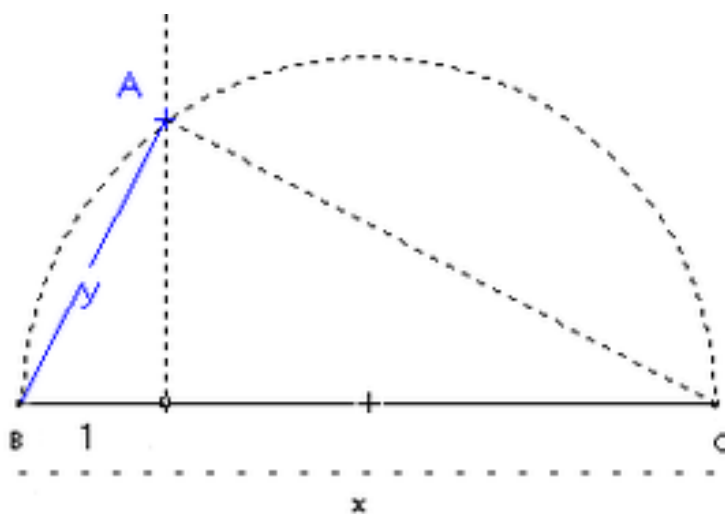


FIGURE 1.11 – Hauteur suffisante ?

Notons qu'un carré vide à l'intérieur n'est pas une structure stable contrairement à un triangle. Pour cela, les architectes utilisent la structure du triangle pour vérifier les angles droits d'un carré. Les égyptiens sont présumés avoir utilisé le triangle droit de périmètre 12 unités de mesure pour vérifier les angles droits de leurs structures, voir Figure 1.12.

Exercice 1.25 (Hauteur suffisante ?)

L'armoire de la Figure 1.13 peut-elle être mise en place.

Plier n'importe quel fraction ?

Prenons un carré de papier de côté unité. On le plie en deux, mais peut-on le plier en trois, ou quatre ou un autre nombre, de façon précise ? Sans deviner ou jouer ?

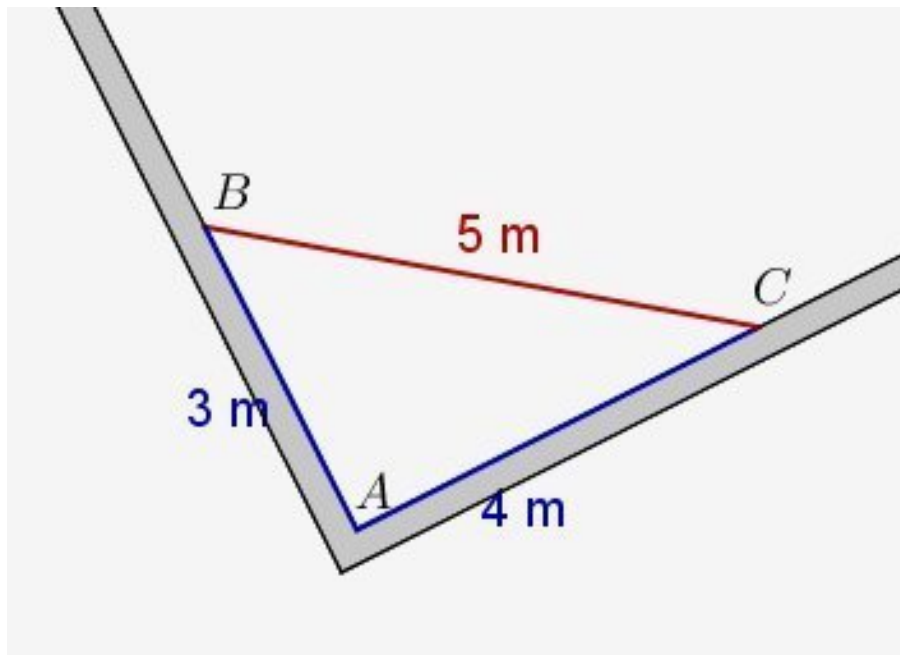


FIGURE 1.12 – Vérification par triangle rectangle

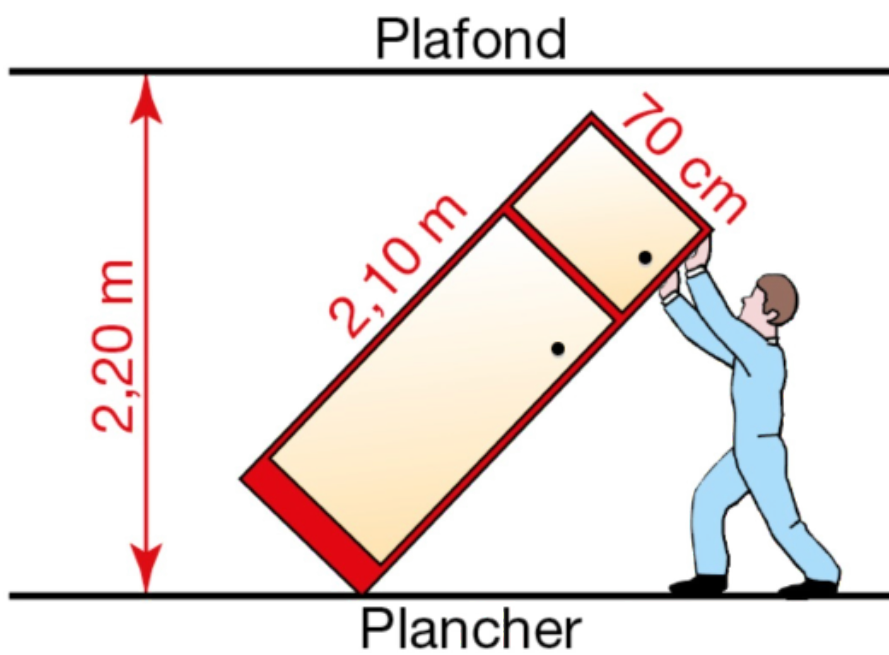


FIGURE 1.13 – Hauteur suffisante ?

Prenons un papier et marquons la moitié comme dans le premier dessin 1.14. Rame-
nons le coin inférieur gauche à cette marque et plions le papier. On arrive à un dessin
similaire à 1.15. En utilisant les triangles semblables et le théorème de Pythagore, on

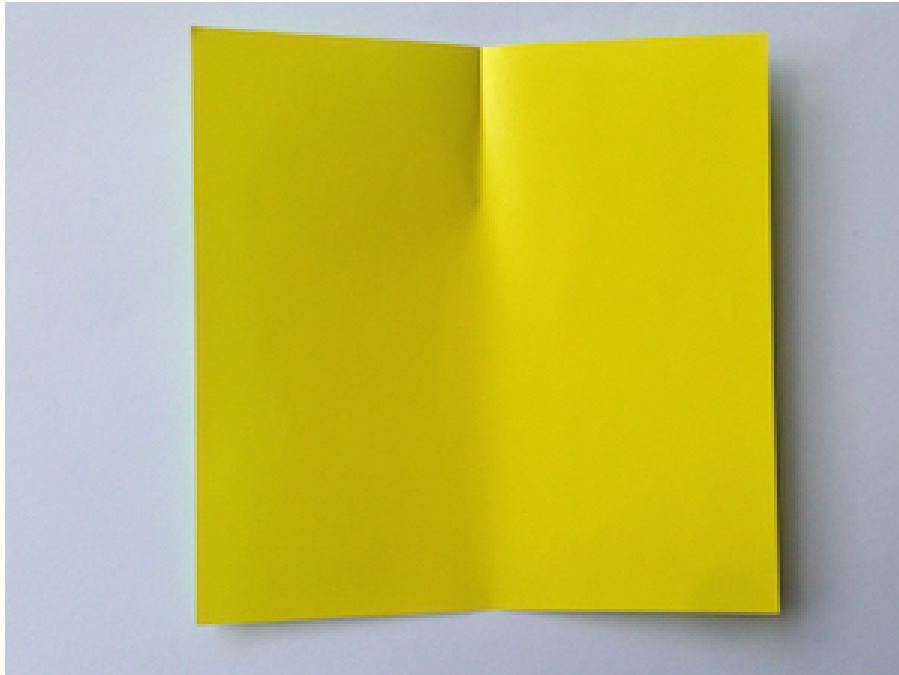


FIGURE 1.14 – Origami 1

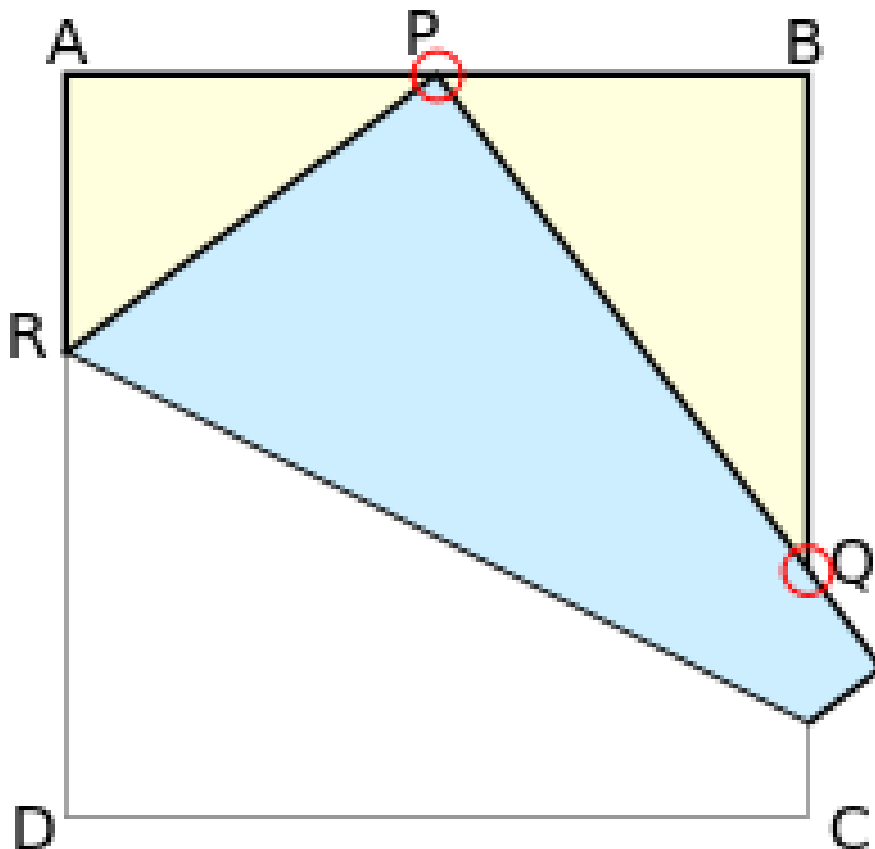


FIGURE 1.15 – Origami 2

trouve que le segment $BQ = 2/3$.

Kazuo Haga⁴ a trouvé une méthode pour plier un papier en un nombre quelconque de fois.

Théorème 1.26 (de Haga)

Soit un carré, prenons comme unité de mesure son côté. Plié comme à la Figure 1.16, on a la relation suivante.

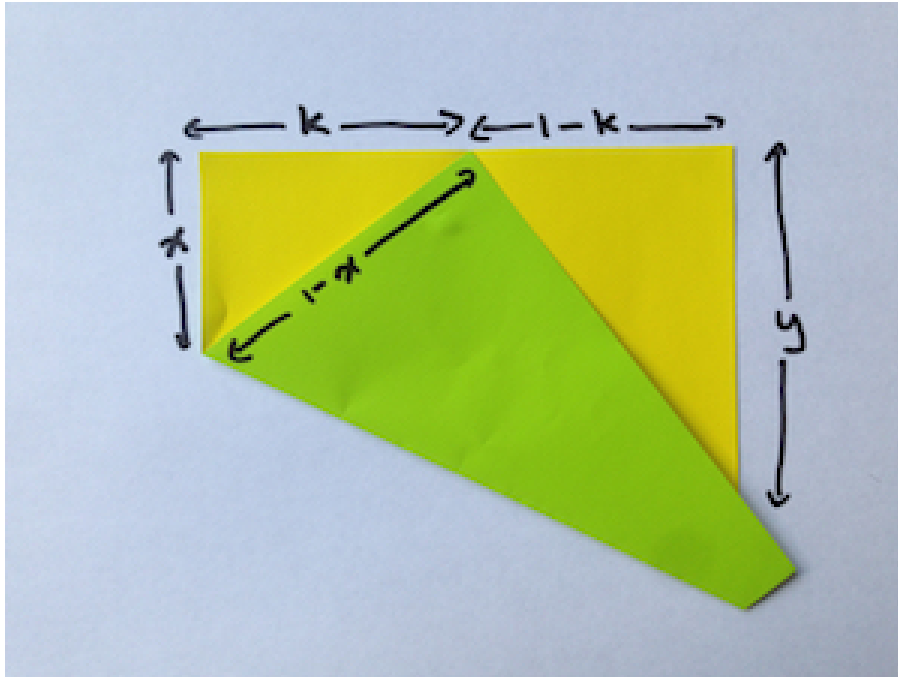


FIGURE 1.16 – Origami, théorème de Haga

$$\frac{y}{2} = \frac{k}{1+k} \quad (1.1)$$

Exercice 1.27

Démontrer ce théorème ? Puis prendre deux feuilles de papier, appliquer le théorème pour plusieurs valeurs de k en partant de $1/2$ sur une feuille et plier l'autre en 5 parties égales.

1.6.3 Théorème des lignes proportionnelles

Théorème 1.28 (est aussi appelé théorème de Thalès)

Si deux sécantes sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles, en d'autres termes si D est un point de la droite AB , E un point de la droite AC et les

⁴Bien qu'il soit un professeur de biologie au Japon, il a trouvé une méthode ingénieuse. Il a utilisé les Origami pour explorer les mathématiques et a ainsi trouvé une méthode pour plier de façon précise en n'importe quel nombre.

droites DE et BC parallèles, alors

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Corollaire 1.29 (Réciproque)

Si A, D, B et A, E, C sont alignés dans le même ordre et si

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

alors les droites DE et BC sont parallèles.

Remarque 1.30

Le théorème de Thalès⁵ sert au calcul de longueur et sa réciproque permet de montrer le parallélisme des droites.

Conséquences et applications

Exercice 1.31 (Trouver la distance inaccessible)

Une des applications du théorème de Thalès est de trouver une distance inaccessible une hauteur ou une profondeur, par exemple, en connaissant les autres mesures.

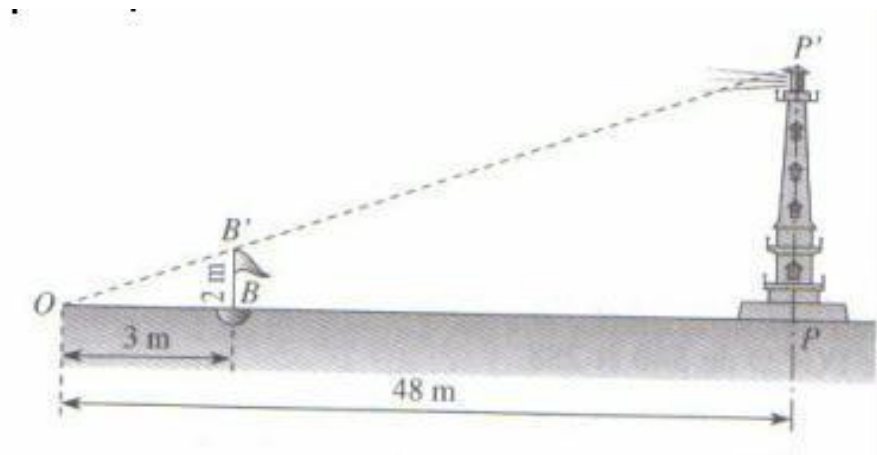


FIGURE 1.17 – Hauteur du Minaret ?

Exercice 1.32 (Construction des nombres rationnels)

Une autre application est le tracé d'un nombre rationnel d'une certaine unité en utilisant seulement la règle et le compas, voir Figure 1.19.

Nous reviendrons avec plus de détails dans les chapitres sur les polygones et polyèdres.

⁵Ce attribution du théorème à Thalès s'explique par une légende selon laquelle Thalès aurait

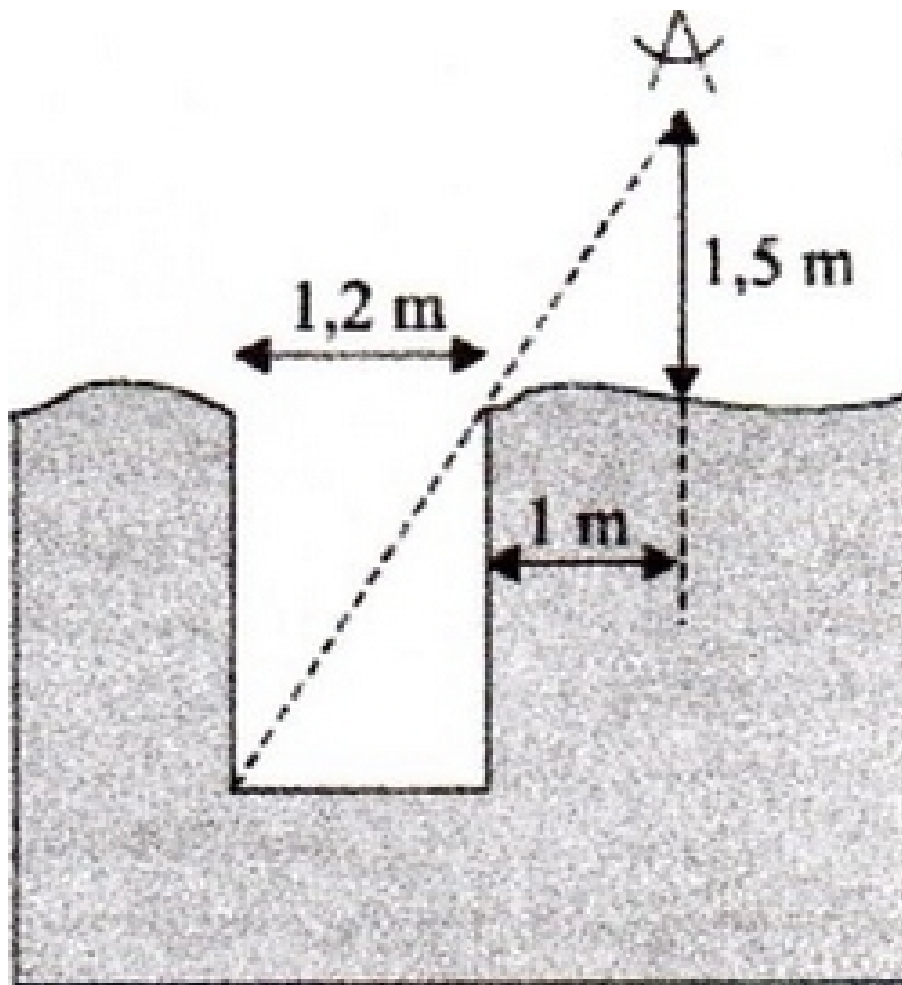


FIGURE 1.18 – Profondeur d'un puits ?

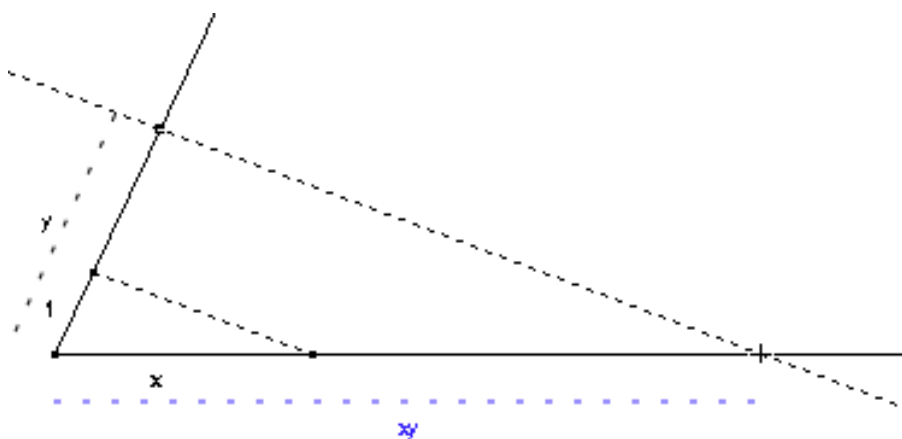


FIGURE 1.19 – Construction d'un nombre irrationnel

1.7 Constructions à la règle et au compas

Une grande partie des problèmes de géométrie classique et presque toute l'algèbre moderne sont issus de questions de construction dite "à la règle et au compas", dont la plupart ont été posées dans l'Antiquité.

La duplication du cube Peut-on construire un cube dont le volume soit le double d'un autre qui existe ? Il s'agit de construire le nombre $\sqrt[3]{2}$.

La quadrature du cercle Peut-on construire un carré dans l'aire soit celle d'un cercle donné ? Il s'agit de construire le nombre $\sqrt{\pi}$.

La trisection de l'angle Peut-on construire deux droites partageant un angle donné en trois parties égales ?

Polygones réguliers Quels polygones réguliers peut on construire à la règle et au compas ? Nous y reviendrons après.

Remarque 1.33

Il va sans dire que ces problèmes de construction n'ont jamais eu aucune application concrète directe.⁶ Pourtant "sans intérêt",⁷ ils sont la source de mathématiques qui ont prouvé leur utilité pratique. En plus, ceci ne veut guère signifier qu'ils n'ont pas d'applications non directes et/ou plus variées.

1.7.1 Principe et conditions de la construction

Soit $P = \{M_1, \dots, M_n\}$ un ensemble de n points du plan. On appelle figures constructibles à la règle et au compas à partir de P :

- les droites passant par deux points distincts de P ,
- les cercles centrés en un point de P passant par un autre point de P .

Définition 1.34 (Point constructible à la règle et au compas à partir de P)

- On dit qu'un point M est constructible à la règle et au compas en un pas à partir de P s'il est l'intersection de deux figures constructibles à la règle et au compas à partir de P .
- On dit qu'un point M est constructible à partir de P si on le construit en un

calculé la hauteur d'une pyramide en mesurant la longueur de son ombre au sol et la longueur de l'ombre d'un bâton de hauteur donnée, résultat déjà connu des égyptiens anciens.

⁶sans parler des possibilités graphiques offertes par les ordinateurs.

⁷Cette remarque vaut aussi pour la résolubilité des équations algébriques par radicaux.

nombre fini de pas à partir de P c'est-à-dire, précisément, s'il existe des points $M_1, M_2, \dots, M_r$ tels que $M_r = M$ et que, pour $i = 1, \dots, r-1$, M_{i+1} est constructible en un pas à partir de $P \cup \{M_1, \dots, M_i\}$.

— *On dit alors que la construction est faite en r pas.*

La règle est d'utiliser une règle et non pas un double-décimètre, c'est-à-dire qu'elle sert à tracer des droites et non pas à mesurer des longueurs. L'écartement du compas permet de reporter les longueurs au fur et à mesure de notre construction.

Exercice 1.35

1. *Construire une droite perpendiculaire à une autre.*
2. *Construire une droite parallèle à une autre.*

1.7.2 Les nombres constructibles

Soient deux points O et A supposés construits. On déduit les droites, cercles et autres points que les règles précédentes autorisent à construire. On utilise la distance OA comme unité.

On dit qu'un nombre réel a est constructible, s'il existe deux points constructibles M et N avec $MN = |a|$.

Proposition 1.36

Soit l'ensemble K des nombres réels constructibles. Si $a, b \in K$ sont positifs alors $\sqrt{a}$, $1/a$, $a+b$ et $a-b$ sont constructibles. $\sqrt{a} \in K$.

Preuve 1.37

Les constructions $a+b$ et $a-b$ sont faciles. Pour les autres longueurs nous utilisons le théorème de Thalès et de Pythagore comme le montre les figures 1.20a ci-dessous :

Théorème 1.38 (Wantzel)

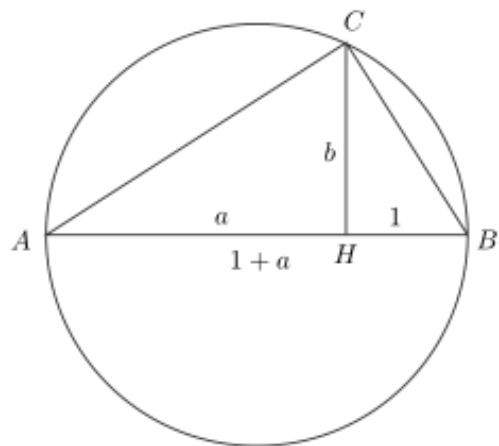
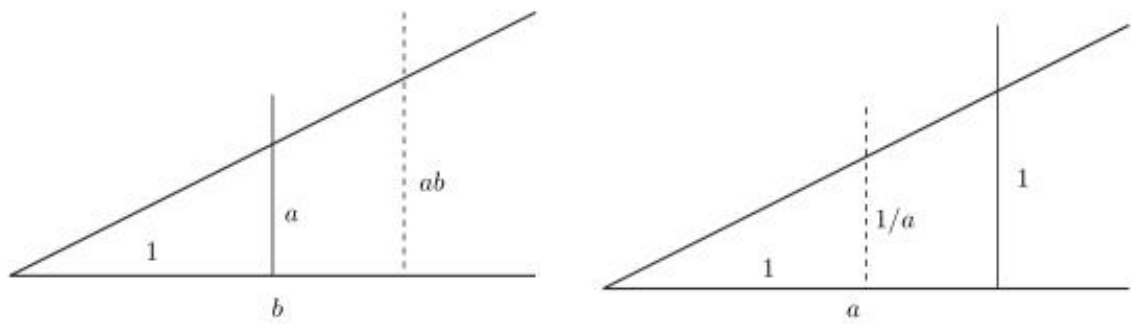
Le degré d'un nombre constructible est une puissance de 2.

Remarque 1.39 (Duplication du cube)

Ce théorème a de nombreuses applications : Un nombre algébrique de degré 3 sur $\mathbb{Q}$ n'est jamais constructible. Le nombre $\sqrt[3]{2}$ étant un nombre algébrique de degré 3 sur $\mathbb{Q}$ n'est pas constructible. La duplication du cube est donc impossible.

Remarque 1.40 (quadrature du cercle)

Le problème de quadrature du cercle revient à la construction du nombre $\sqrt{\pi}$, qui re-



(a) Construction de nombres

vient à la construction de π qui est transcendant⁸, d'où l'impossibilité de la quadrature du cercle.

La question de la trisection des angles se formule de la façon suivante : si 3θ est un angle constructible, θ est-il un angle constructible ?

Proposition 1.41 (impossibilité de la trisection de l'angle)

Il existe un nombre réel θ tel que 3θ soit constructible mais pas θ .

Remarque 1.42

Evidemment⁹, il existe des angles que l'on trissekte comme par exemple l'angle $3\theta = \pi = 180^\circ$.

Pour la question de la constructibilité du polygone régulier à n côtés, cela revient à déterminer pour quels entiers n l'angle $2\pi/n$ est constructible.

Exercice 1.43

Construire les formes suivantes, voir Figure 1.21.

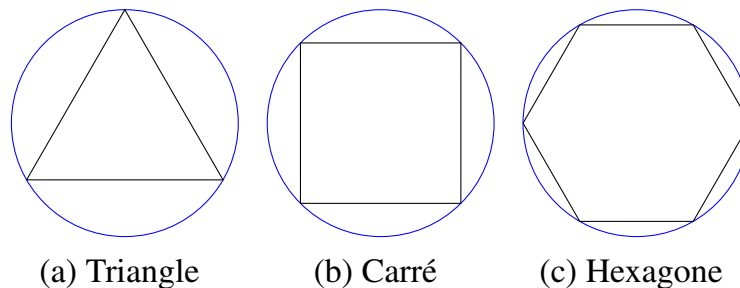


FIGURE 1.21 – Quelques polygones réguliers constructibles.

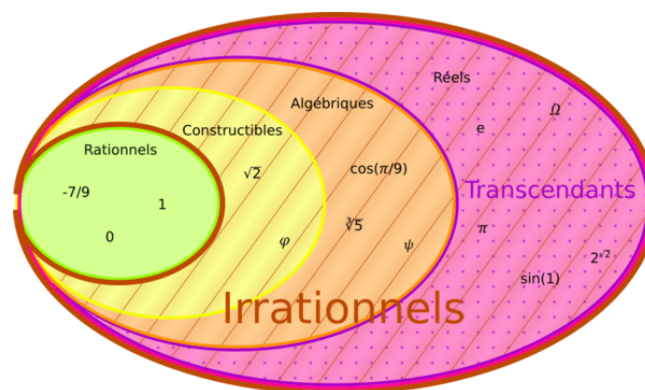


FIGURE 1.22 – Les nombres constructibles

⁸Voir, le théorème de Lindeman que nous omettons volontairement de montrer

⁹Il existe bien d'autres méthodes pour trissecter un angle en utilisant d'autres outils que la règle et le compas, voir par exemple l'outil d'Origami et la construction de Hisashi Abe.

Trigonométrie et cercle

La trigonométrie a pour racine étymologique "mesure des corps à trois angles (trigones)".

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la trigonométrie du cercle. Nous ferons appel à certains prérequis en trigonométrie que nous omettrons de rappeler.

Certaines définitions et quelques théorèmes seront proposés par la suite.

Le but est en particulier de déterminer les relations les plus courantes dans la trigonométrie qui sont très utilisées en architecture.

2.1 Définitions

angle droit tout angle égal à la moitié d'un angle plat. Nous disons que deux angles sont des "angles perpendiculaires", lorsqu'ils sont tous les deux droits et adjacents.

angle aigu tout angle inférieur à un angle droit.

angle obtus tout angle supérieur à un angle droit.

angle orienté ou "angle vectoriel"¹, l'angle défini entre deux vecteurs ou droites de même origine et dont la valeur mesurée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sera pris comme positif et négatif s'il est pris dans l'autre sens. L'exemple le plus connu d'angle orienté est celui du cercle trigonométrique.

angles supplémentaires Nous disons que deux angles sont des "angles supplémen-

¹En réalité, pour bien décrire les choses, on définit d'abord ce qu'est une rotation (vectorielle) dans le plan euclidien, ...

taires" lorsque leur somme vaut deux angles droits, soit un angle plat.

angles complémentaires Nous disons que deux angles sont des "angles complémentaires" lorsque leur somme vaut un angle droit.

radian Nous appelons "1 radian", noté $[\text{rad}]$, l'angle plan décrit par une sécante à un cercle, passant par son centre, tel que l'arc de cercle ainsi défini par l'axe horizontal passant par le centre du cercle et la sécante soit d'égale longueur au rayon de ce cercle, voir la Figure 2.1.

Angle au centre Soit un cercle de centre O , on appelle angle au centre, tout angle dont le sommet est au centre du cercle. La mesure de l'angle au centre est égale à la mesure de l'arc intercepté.

Angle inscrit Soit un cercle de centre O , on appelle angle inscrit dans le cercle, tout angle dont le sommet est sur la circonférence.

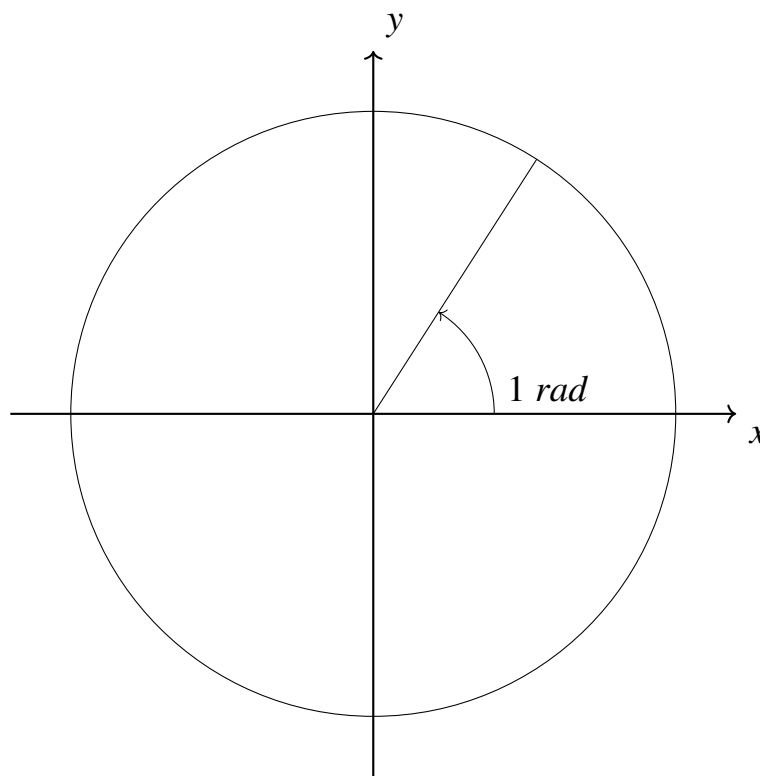


FIGURE 2.1 – Le radian

2.2 Le cercle trigonométrique

Soient deux angles a et b , nous avons les relations ci-après.

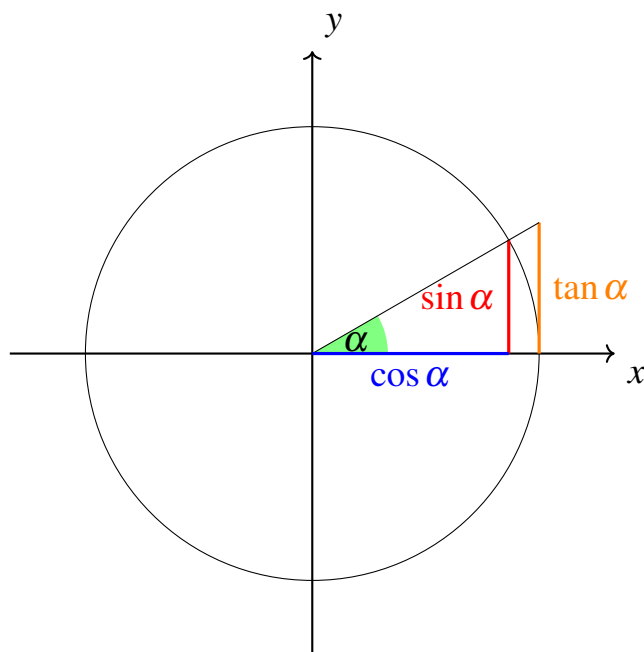


FIGURE 2.2 – Le cercle trigonométrique

2.3 Relations remarquables

$$\cos(-a) = \cos(a)$$

$$\sin(-a) = -\sin(a)$$

$$\tan(-a) = -\tan(a)$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$

$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$

$$\tan(\pi - a) = -\tan(a)$$

Exercice 2.1

Donner les formules similaires pour $\cos(\frac{\pi}{2} - a)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - a)$ et $\tan(\frac{\pi}{2} - a)$.

2.3.1 Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

2.3.2 Formules d'addition bis

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a)^2 - \sin(a)^2 \\ &= 2\cos(a)^2 - 1 \\ &= 1 - 2\sin(a)^2 \\ &= \frac{1 - \tan(a)^2}{1 + \tan(a)^2} \cdot \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a). \\ \tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1 - \tan(a)^2}.\end{aligned}$$

2.3.3 Formules de produit-somme

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a+b) - \cos(a-b)}{2} \\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} \\ \cos(a)\sin(b) &= \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}\end{aligned}$$

2.3.4 Formules de somme-produit

$$\begin{aligned}\cos(a) + \cos(b) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{aligned}$$

Polygones et Polyèdres

3.1 Figures et quadriques

Il est bon de noter qu'avant toute construction en architecture, une étude est prévue pendant laquelle de nombreuses figures, voir les photos suivantes, quelles soient simples ou complexes doivent être modélisées mathématiquement en vue d'un calcul de volume, de masse, de rigidité ainsi que pour toute autre démarche ultérieure.

Nous introduisons dans ce qui suit d'autres formes, plus au moins connues et quelques applications de ces formes en architecture.

Il est impossible de répertorier toutes les formes possibles sans parler des équations qui les décrivent et les propriétés qui en découlent. Cependant, il est indispensable de connaître quelque unes.

La forme la plus exploitée de toutes est le cercle.

3.1.1 Le cercle

Soit un cercle de centre l'origine de notre repère et de rayon r . Le cercle est défini ainsi

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Une autre façon de le définir est la suivante :

$$\begin{cases} x = r \cos(t), \\ y = r \sin(t). \end{cases}$$

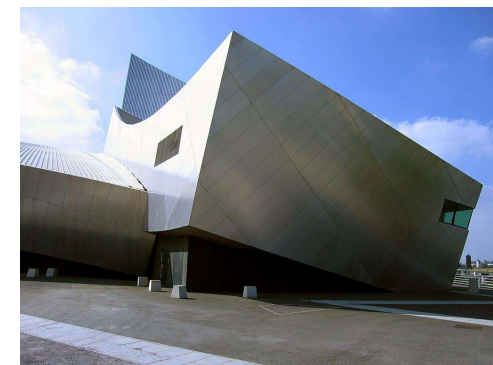
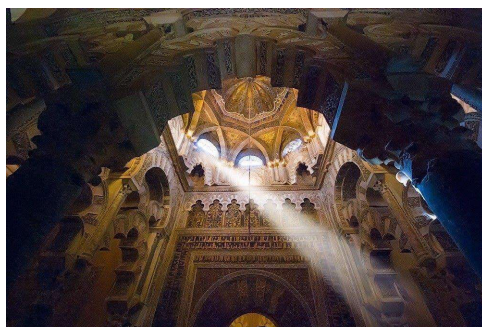
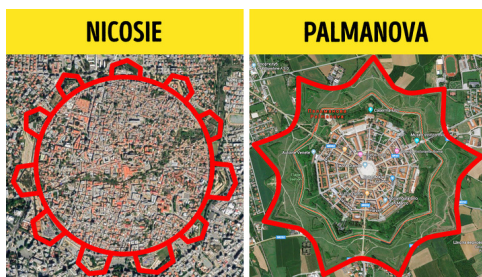
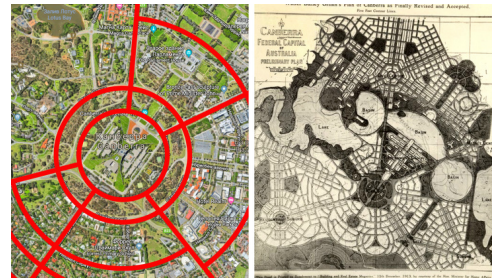
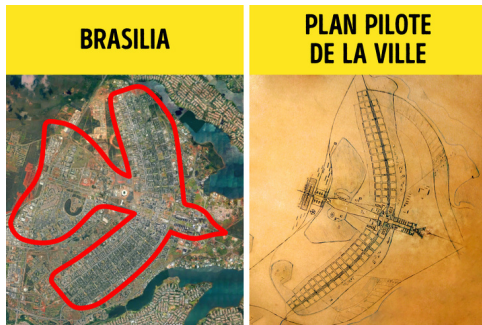


FIGURE 3.1



FIGURE 3.2

En variant t sur $[0, 2\pi[$, on retrouve le cercle, sinon c'est un arc de cercle si $t < 2\pi$.

3.1.2 Le cylindre

Le cylindre qui est un centre translaté selon la direction de Oz est défini comme suit :

$$x^2 + y^2 = r^2, -h < z < h.$$

Il est la surface engendrée par un segment AB en tournant autour d'une droite qui lui est parallèle.

On distingue aussi par cylindre le solide limité par la surface précédente et les disques de centre O et O' appelés bases du cylindre. Les segments tels que AB s'appellent génératrice du cylindre.

La surface latérale du cylindre est $2\pi Rh$.

Sa surface totale est

$$S = 2\pi R(h + R),$$

où R est le rayon de la base et h la hauteur du cylindre.

Le volume est

$$V = \pi R^2 h.$$

3.1.3 La sphère

Elle est définie comme les points équidistants à l'origine dans l'espace et sa formule en découle :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Sa surface totale est

$$S = 4\pi R^2.$$

Le volume est

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exercice 3.1

Donner la forme paramétrique du cylindre et réfléchir à une pour la sphère.

3.1.4 L'ellipsoïde

L'équation de l'ellipsoïde est donnée par la relation suivante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2.$$

3.1.5 Le cône de révolution

Le cône circulaire droit ou cône de révolution est une surface engendrée par la révolution d'une droite sécante à un axe fixe autour de ce dernier. Il s'agit d'un cas particulier de cône,

$$x^2 + y^2 = b^2 z^2.$$

Il est la surface engendrée par un segment SA en tournant autour d'une droite passant par l'une de ses extrémités.

L'aire latérale du cône est πRa où a est la longueur de SA .

Le volume du cône est

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Les sections d'un cône ou l'intersection de celui-ci avec un plan qui le coupent déterminent quatre autres formes géométriques : Le cercle, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole.

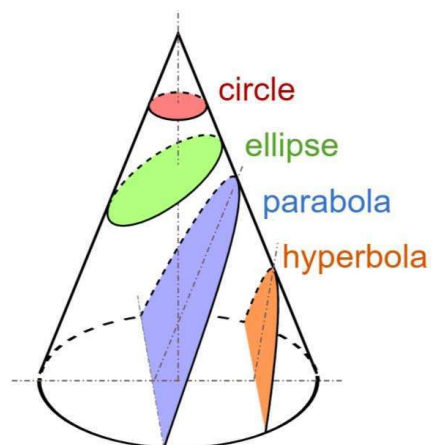
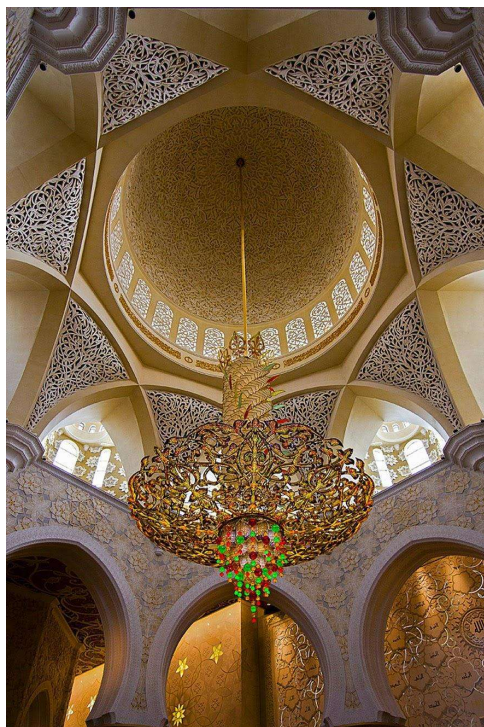


FIGURE 3.3

3.1.6 Le paraboloïde

$$x^2 + y^2 = az$$

3.1.7 L'hyperboloïde

Soit l'hyperboloïde à une nappe suivant

$$x^2 + y^2 = az$$

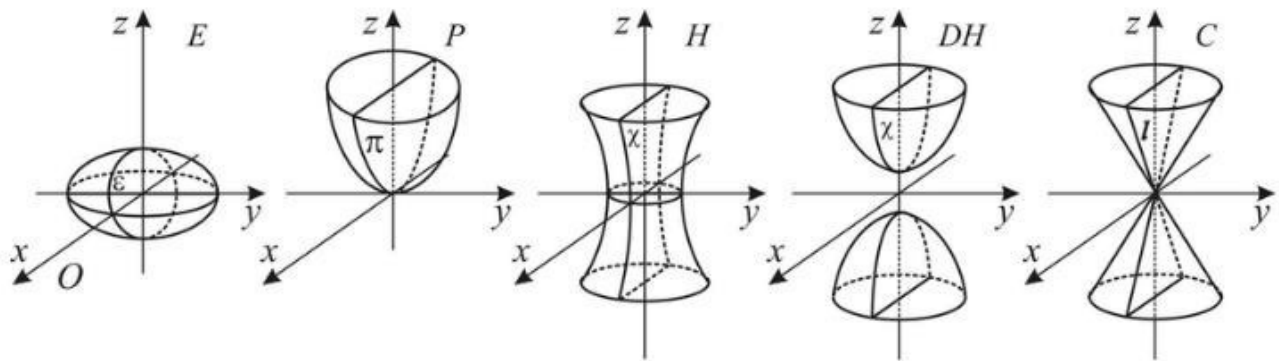
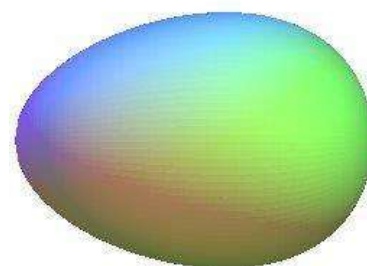
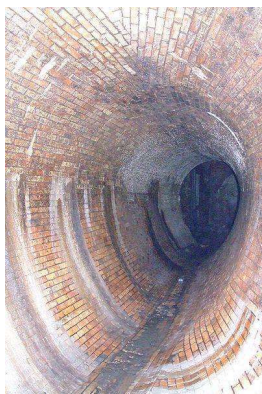


FIGURE 3.4

3.1.8 L'ovoïde

Il existe plusieurs équations pour décrire un uf en mathématique. Le modèle le plus utilisé est la courbe étudiée par Hügelschäffer en 1948 :

$$\frac{(x-d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2dx-d^2}{a^2} \right) = 1$$

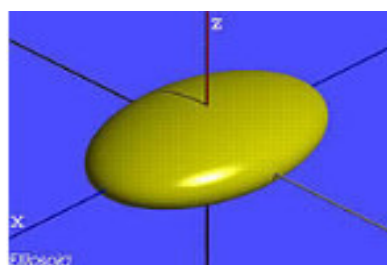


3.1.9 Autres formes

Les formes suivantes sont des quadriques¹ ou surfaces quadriques. Les équations réduites d'un polynôme de degré 2 donnent lieu aux équations suivantes.

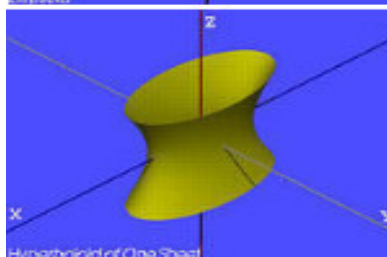
ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$



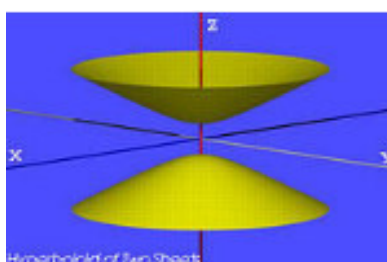
hyperboloïde à une nappe (H1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$



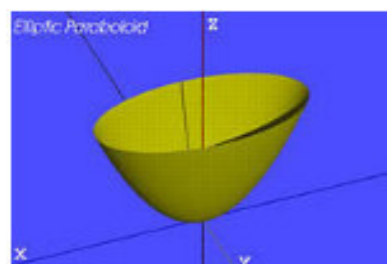
hyperboloïde à deux nappes (H2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$



Paraboloïde elliptique (PE)

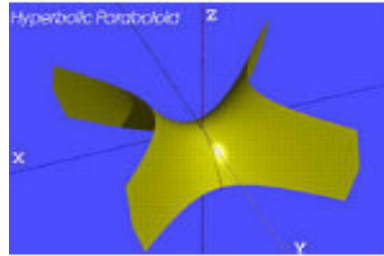
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$



¹surfaces algébriques de degré 2

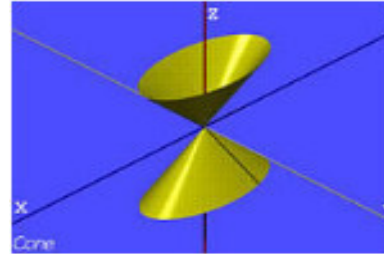
Paraboloïde hyperbolique (PH)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$



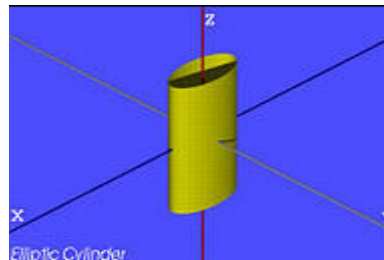
Cône à base elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



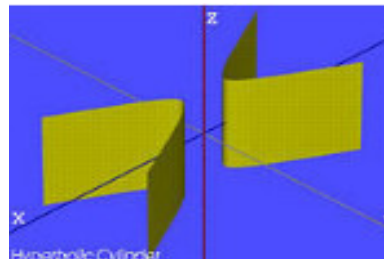
Cylindre elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$



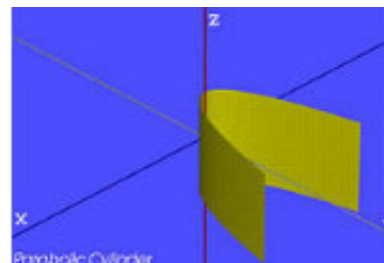
Cylindre hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$



Cylindre parabolique

$$x^2 = 2py.$$



3.2 Polygones

Il existe d'autres formes géométriques dont les polygones et les polyèdres qui sont les plus importantes depuis longtemps. Les premiers ont un grand intérêt pratique. Ils forment une classe de figures à la fois suffisamment simples pour le calcul de surfaces qu'elles entourent et sont suffisamment variés pour approcher n'importe quelle courbe fermée, notamment la frontière d'un pays.

Polygone vient du grec polys qui veut dire nombreux et gonia qui signifie angle. Pour le nommer, on utilise un préfixe grec pour la partie numérique du nom suivi de la

terminaison gonne. Par exemple, un polygone à six côtés est appelé hexagone. celui à neuf côtés est un enneagone.

Définition 3.2

Un polygone est une figure géométrique constituée de segments mis bout à bout pour former une boucle fermée. Un polygone est aussi une figure plane limitée par des segments de droites consécutifs.

Une large part des démonstrations sur les polygones utilise les propriétés élémentaires du triangle.

Définition 3.3

Un polygone est dit croisé si deux au moins de ses côtés sont sécants.

Exemple 3.4

L'étoile du drapeau national algérien est un polygone croisé.

Remarque 3.5

L'enveloppe d'un polygone croisé est obtenu en suivant le contour extérieur de celui-ci. Pour l'exemple précédent, c'est un décagone dont les sommets sont les cinq sommets du pentagone et les cinq intersections de ses côtés.

Dorénavant, nous considérons que les polygones non croisés.

Définition 3.6

Un polygone est dit régulier si ses côtés et ses angles sont respectivement égaux. Cette définition nous sera utile pour les polyèdres réguliers.

Définition 3.7

Un polygone est dit convexe s'il n'est pas croisé et si toutes ses diagonales sont entièrement à l'intérieur de la surface délimitée par le polygone.

Définition 3.8

Un polygone est dit concave s'il n'est pas croisé et si une ou plusieurs de ses diagonales ne sont pas entièrement à l'intérieur de la surface délimitée par le polygone.

Remarque 3.9

- *Nous supposons que les relations des périmètres et surfaces des triangle, carré, rectangle, losange, parallélogramme et trapèze sont déjà connues.*
- *Le cercle est un cas particulier d'un polygone avec une infinité de côtés.*

Sommet Point de rencontre de deux segments dans un polygone. Deux sommets qui se suivent sont dits consécutifs.

Diagonale Segment de droite qui relie deux sommets non consécutifs dans un polygone. Carré, pentagone et hexagone ont respectivement deux, cinq et neuf diagonales.

Apothème L'apothème d'un polygone régulier convexe est la perpendiculaire abaissée du centre du polygone sur un côté ou encore le rayon du cercle inscrit à ce polygone. C'est donc la longueur du segment joignant le centre du polygone au milieu d'un côté et porté par la médiatrice de celui-ci.

Rayon longueur entre le centre et l'un des sommets du polygone.

Réflexion 3.10

Quel est le nombre de diagonales d'un polygone de n côtés ?

Définition 3.11

Un polygone est dit régulier lorsque tous ses côtés et angles sont respectivement égaux. Le bâtiment abritant l'état-major des armées américaines, par exemple, est un pentagone régulier, d'où son nom. Voir la figure Figure 3.5 ci-dessous

Définition 3.12

Un polygone est inscrit dans un cercle quand tous ses sommets sont sur le cercle.

Définition 3.13

Un polygone est circonscrit à un cercle quand tous ses côtés sont tangents au cercle qui est alors inscrit.

3.2.1 Construction des polygones

Une des questions posées depuis l'antiquité est quels sont les polygones réguliers et ceux qui ne le sont pas. Gauss et Wantzel donnent un théorème sur ce sujet.

Définition 3.14

Un nombre de Fermat s'écrit sous la forme $2^{2^n} + 1$ avec n entier naturel. Le n -ième nombre de Fermat est noté $F_n := 2^{2^n} + 1$

Les seuls nombres de Fermat premiers connus sont $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$.

Les nombres de Fermat disposent de propriétés intéressantes. Le théorème de Gauss-Wantzel établit, en particulier, un lien entre ces nombres et la construction à la règle et au compas des polygones réguliers.

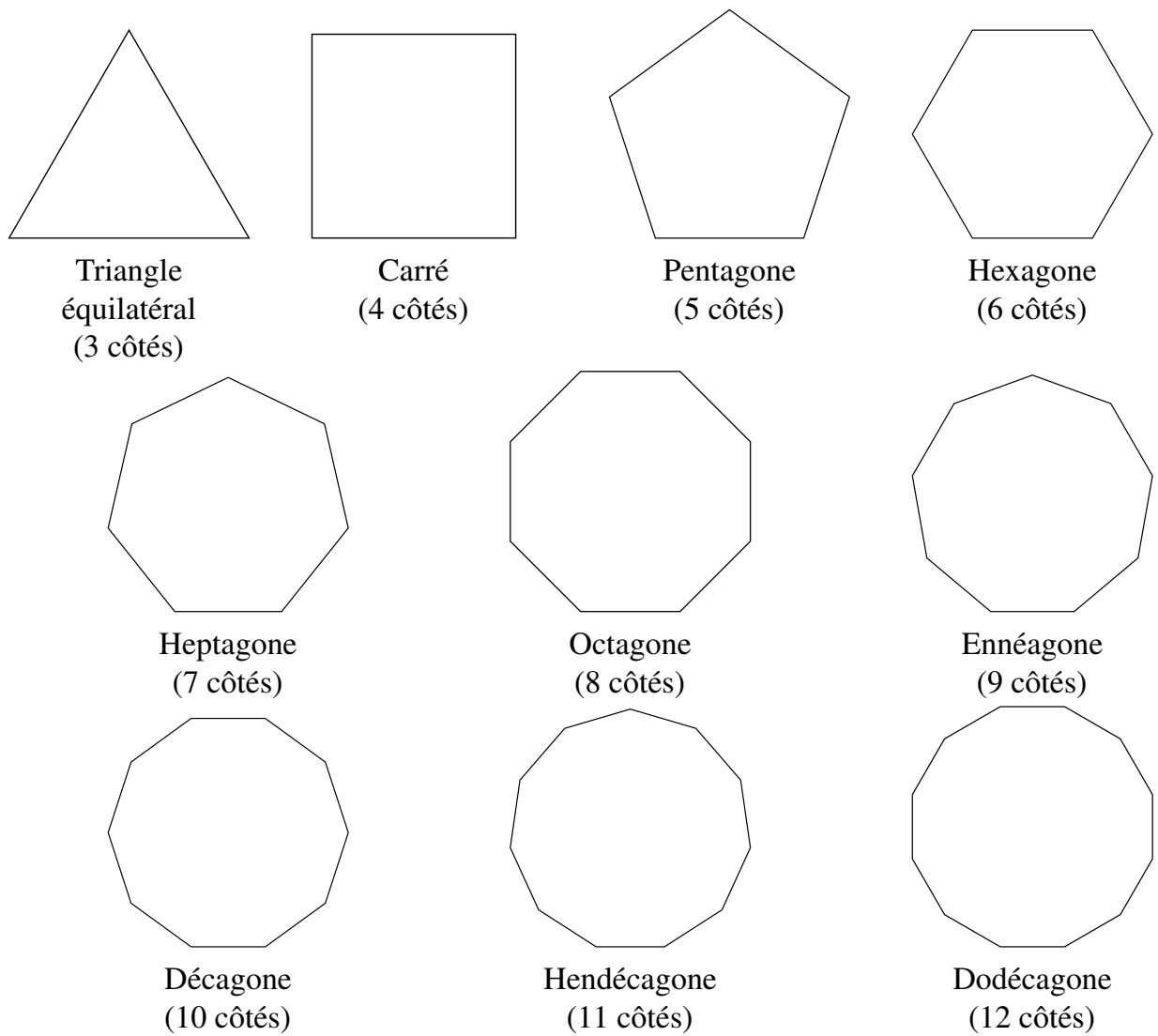


FIGURE 3.5 – Quelques polygones réguliers

Théorème 3.15 (Gauss-Wantzel)

Un polygone régulier à n côtés peut être construit à la règle et au compas si et seulement si n est une puissance de 2, ou le produit d'une puissance de 2 et d'un des nombres de Fermat premiers distincts.

Exercice 3.16

- *Trouver une méthode qui permet de construire le carré, le triangle équilatéral et le pentagone d'une façon exacte.*
- *Trouver une méthode qui permet de construire d'une manière approchée différents polygones réguliers.*

3.2.2 Propriétés

Rayon R .

Apothème $a = R \cos(\pi/n)$.

Angle au centre $\alpha = 2\pi/n$.

Angle du polygone $\beta = \pi - \alpha$.

côté $c = 2R \sin(\pi/n)$.

Périmètre $p = nc = 2nR \sin(\pi/n)$.

Aire $A = nac/2 = pa/2$.

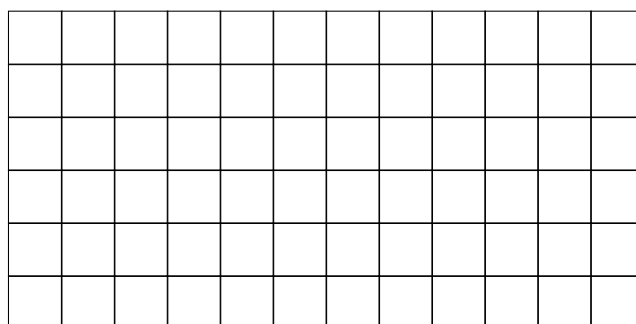
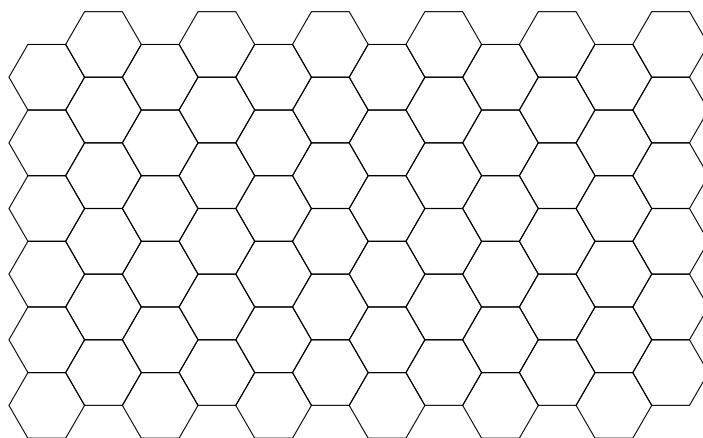
3.2.3 Pavage du plan avec un polygone régulier

Un pavage est une partition du plan en polygones ne pouvant ni se chevaucher ni laisser de places vides. Ses symétries sont des mouvements qui consistent à pousser, faire tourner et renverser tout en préservant les décors. Elles se composent, donnent lieu à de nouvelles symétries et forment un groupe d'isométries du plan². On sait par ailleurs que seuls les polygones réguliers qui pavent le plan sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone.

Exercice 3.17

Démontrer d'une façon géométrique l'impossibilité de pavage du plan autre que par les polygones précédents.

²La classification de ce type de groupe est maintenant établie : on a exactement 17 groupes paveurs. Il n'est pas dit qu'il n'existe que 17 pavages du plan : On ne peut pas paver n'importe comment avec n'importe quoi, mais les choix rationnels restent illimités !



(a) Pavage du plan avec le carré et l'Hexagone

Réflexion 3.18

Peut-on paver le plan avec d'autres figures que les polygones réguliers ? Donner un exemple si vous le confirmez ou une intuition si vous le déniez !

3.3 Polyèdres, prismes et polyèdres étoilés

Définition 3.19

Un "polyèdre" est un solide dont la frontière est formée de plans ou de portions de plan. Celles-ci sont les faces et comprennent entre elles le polyèdre. Chacune est un polygone limité par les arêtes qui sont les intersections avec les faces voisines. Les côtés de ce polygone sont les arêtes du polyèdre. Tout sommet d'une quelconque de ses faces est dite "sommet d'un polyèdre".

3.3.1 Solides de Platon

En géométrie euclidienne, un solide de Platon est un polyèdre régulier et convexe. Tandis que les polygones réguliers et convexes de la géométrie plane sont en nombre infini,

il existe seulement cinq solides de Platon.

Quels sont les polyèdres platoniciens ?

Les polyèdres de Platon³ sont des solides.

Le nombre de faces du solide 4, 6, 8, 12, ou 20 est dans le préfixe du nom du solide : tétra pour quatre, hexa pour six – un cube est un hexaèdre régulier –, octa pour huit, dodéca pour douze, icosa pour vingt. L’adjectif régulier sera souvent implicite.

Les cinq types de polyèdres réguliers convexes

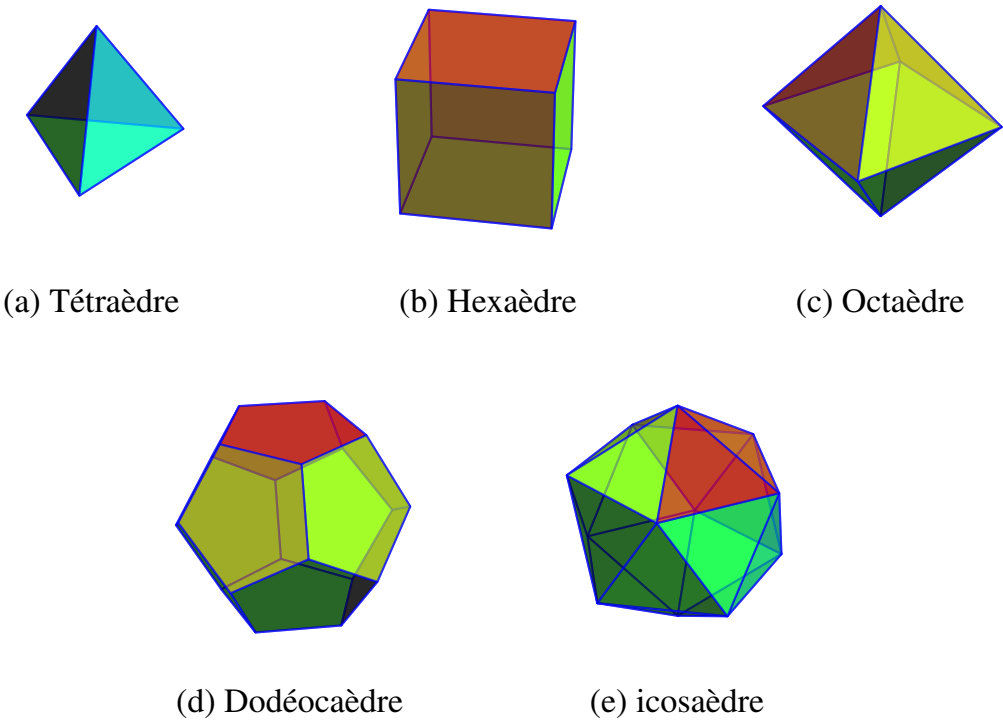


FIGURE 3.7 – Les cinq polyèdres réguliers

Polyèdre	Sommets	Arêtes	Faces
Tétraèdre	4	6	4 triangles équilatéraux
Hexaèdre	8	12	6 carrés
Octaèdre	6	12	8 triangles équilatéraux
Dodécaèdre	20	30	12 pentagons réguliers
Icosaèdre	12	30	20 triangles équilatéraux

³Platon n’y est pour rien, la première démonstration sur les cinq types est attribuée à Théé-

Propriétés des polyèdres

On note p le nombre de côtés de chaque face, q le nombre de faces se rencontrant en un sommet, S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. On a les deux égalités suivantes :

$$2A = pF$$

$$2A = qS$$

Mais, une autre relation lie le nombre de faces, d'arêtes et de sommets, c'est la formule d'Euler. Pour un tel polyèdre, on a :

$$F - A + S = 2$$

On en déduit que

$$2\frac{A}{p} - A + 2\frac{A}{q} = 2$$

donc

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

Comme p et q doivent par définition être supérieurs ou égaux à 3, on en déduit la liste des couples d'entiers p et q possibles :

$p = 3, q = 3$: Tétraèdre ou pyramide à base triangulaire

$p = 3, q = 4$: Octaèdre

$p = 3, q = 5$: Icosaèdre

$p = 4, q = 3$: Hexaèdre

$p = 5, q = 3$: Dodécaèdre

3.3.2 D'autres polyèdres

Le prisme

Un prisme est un polyèdre ayant deux faces parallèles (ses bases) dont les sommets sont joints deux à deux par des arêtes, formant les faces latérales qui doivent être des parallélogrammes. Le prisme est dit droit lorsque les faces latérales sont rectangulaires.

tête d'Athènes.

L'ordre du prisme est celui de ses bases.

Les prismes sont aux polyèdres ce que les cylindres sont aux surfaces tandis que les pyramides sont aux polyèdres ce que les cônes sont aux surfaces. La réunion des faces latérales d'un prisme forme un tronc de cylindre.

3.4 Les polyèdres archimédiens

Les polyèdres d'Archimède sont les 13 polyèdres semi-réguliers autres que les polyèdres réguliers, les prismes et les antiprismes.

On les caractérise par le code de Schläfli commun aux sommets qui indique dans l'ordre les types de polygones réguliers que reçoit chaque sommet.

Par exemple : $3.5_2.4$ signifie que chaque sommet reçoit un triangle, puis deux pentagones, et un carré, voir aussi la Figure 3.8.

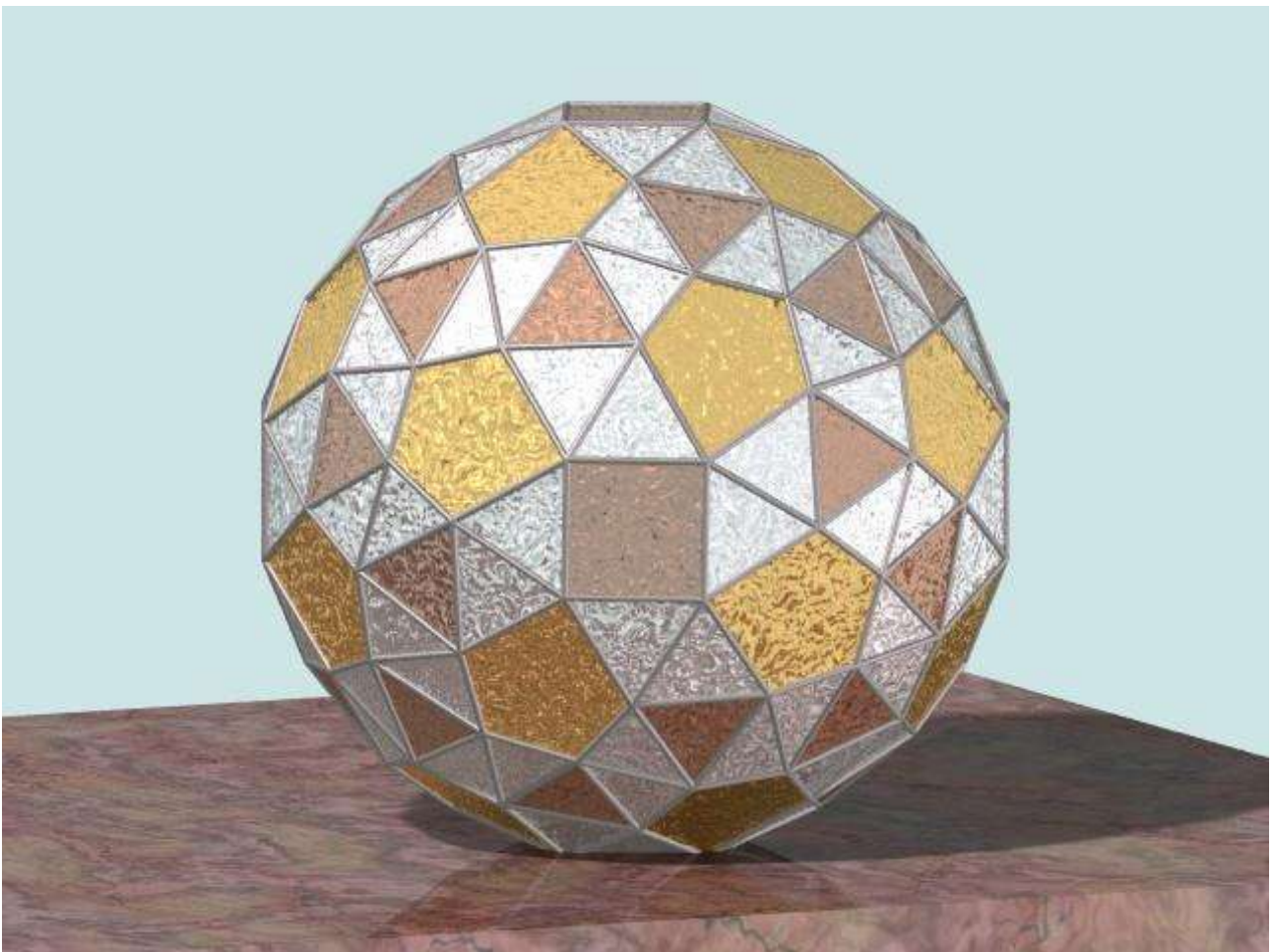


FIGURE 3.8

Exercice 3.20

— De ce qui précède et des figures suivantes, donner quelques utilités des polyèdres.

— *Quels polyèdres sont utilisés dans les figures suivantes.*

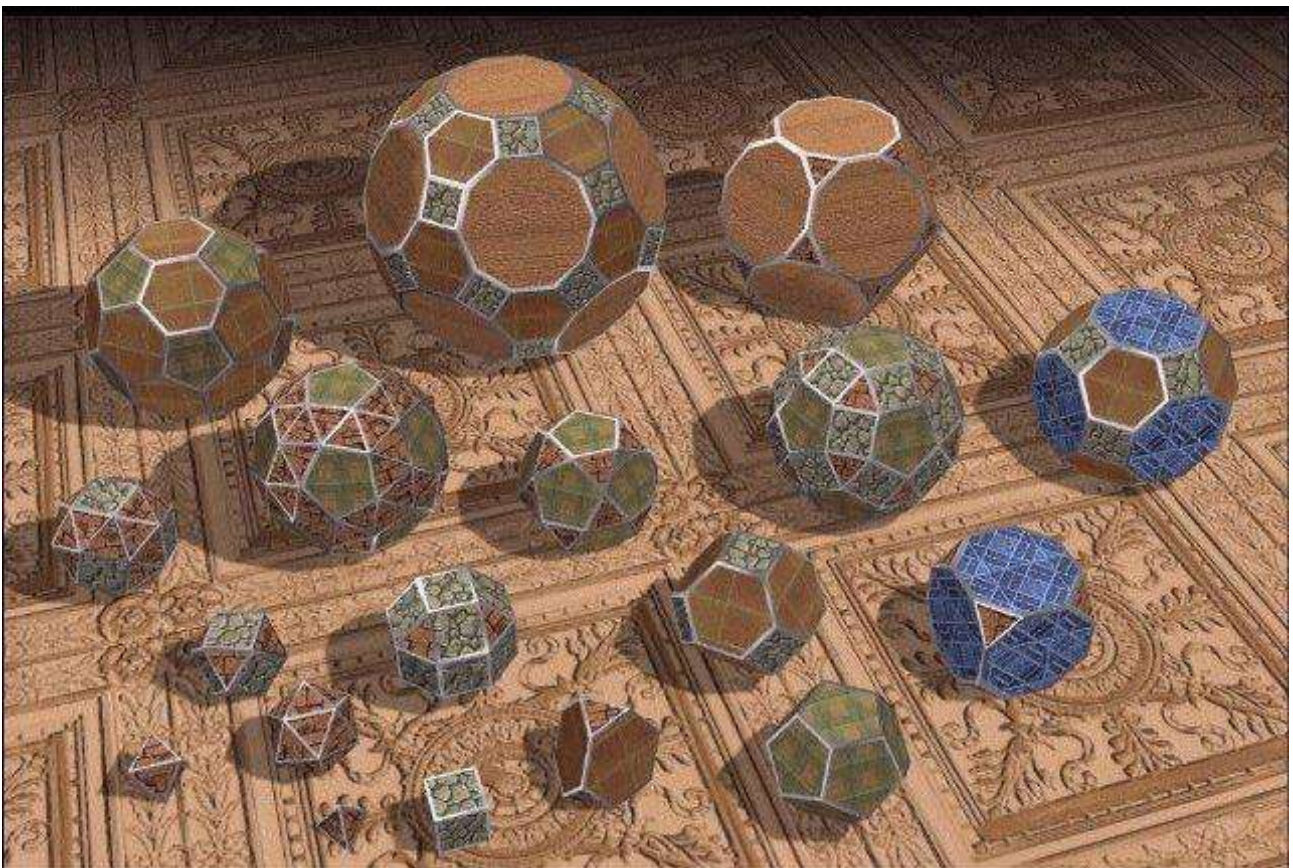
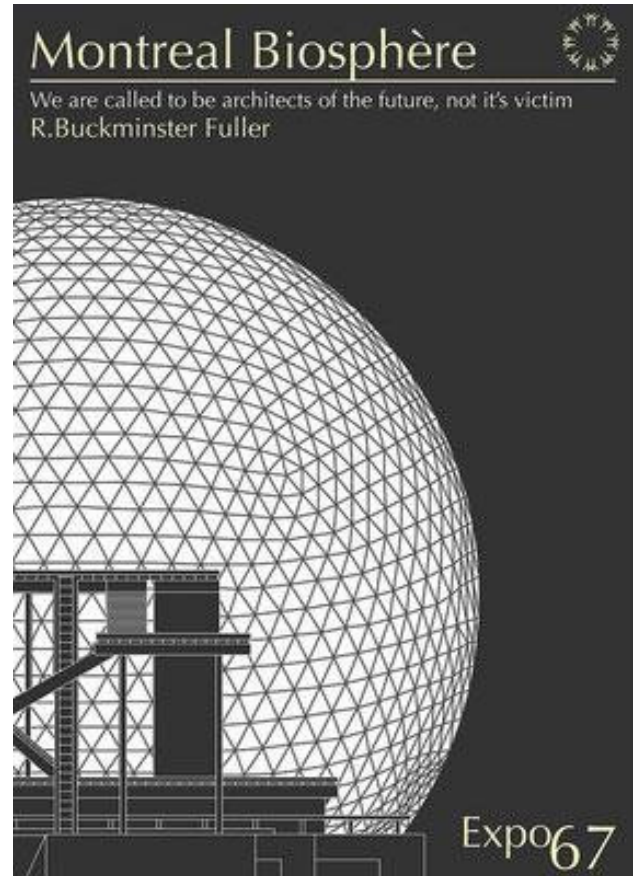
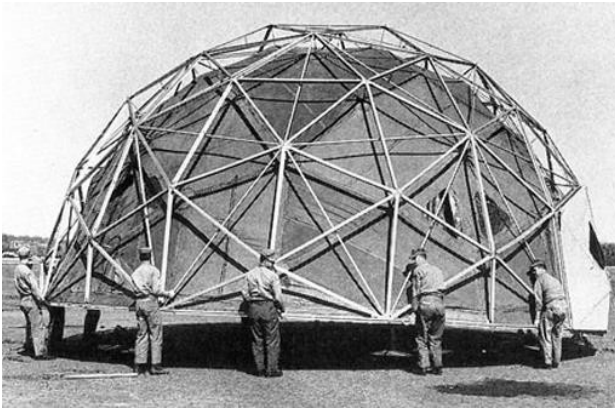


FIGURE 3.9

Systèmes de coordonnées

L'un des besoins fréquents en urbanisme et en architecture est de mesurer et toute mesure a besoin d'une référence. Nous aurons donc besoin de déterminer d'une façon unique la position d'un point à l'aide d'une donnée qui est un point repère.

En mathématique, pour se repérer dans un plan euclidien, on détermine la position d'un objet à l'aide des coordonnées de l'objet qui sont des chiffres et lettres comme dans un échiquier ou des nombres.

Dans un diagramme cartésien d'ordre n , nous avons besoin de n nombres pour fixer la position du point par rapport à chacun des axes. Les valeurs sont trouvées par les projections parallèles du point sur chacun des axes. L'intérêt que porte l'étude des systèmes de coordonnées pour un architecte est vaste. On cite quelques éléments clés : repérage sur la surface de la terre, topologie du milieu à étudier, calcul de volume et de surface, géolocalisation, compréhension des coordonnées G.P.S. et utilisation effective des Geographic Information Systems (G.I.S.), etc.

4.1 Repérage sur un axe

L'adresse d'un objet ou d'un point sur un axe est appelée abscisse du point.

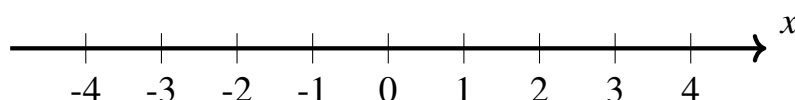


FIGURE 4.1 – Repérage par abscisse

4.2 Repérage sur un plan

4.2.1 Système de coordonnées cartésiennes

C'est le système le plus utilisé et le plus connu. Les coordonnées sont formées de couples de nombres. Le premier x_1 réfère à la position horizontale ou abscisse. Le second élément y_1 est l'ordonnée.

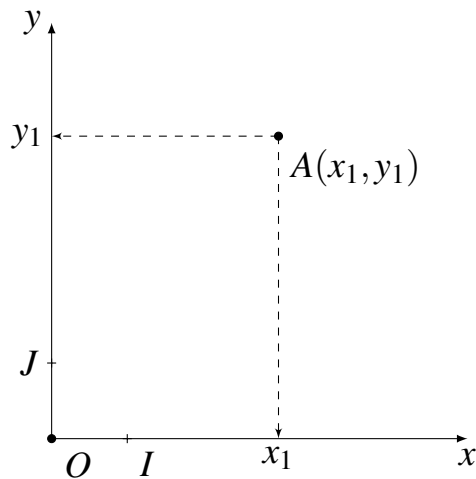


FIGURE 4.2 – Repérage par des coordonnées cartésiennes

4.2.2 Système de coordonnées polaires

Dans ce système, chaque point P est repéré par la distance de l'origine noté r et l'angle θ que fait le segment de droite OP avec l'axe polaire OX .

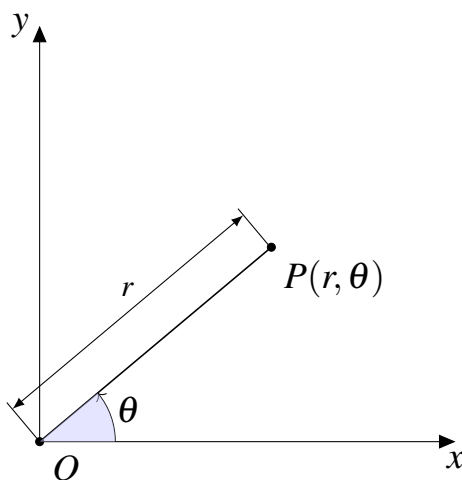


FIGURE 4.3 – Les coordonnées polaires r et θ

Nous avons les relations suivantes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

et

$$x = r \cos(\theta)$$
$$y = r \sin(\theta)$$

4.3 Repérage dans l'espace euclidien

4.3.1 Système de coordonnées cartésiennes

Le repérage par les coordonnées cartésiennes se fait d'une manière similaire à celle du plan.

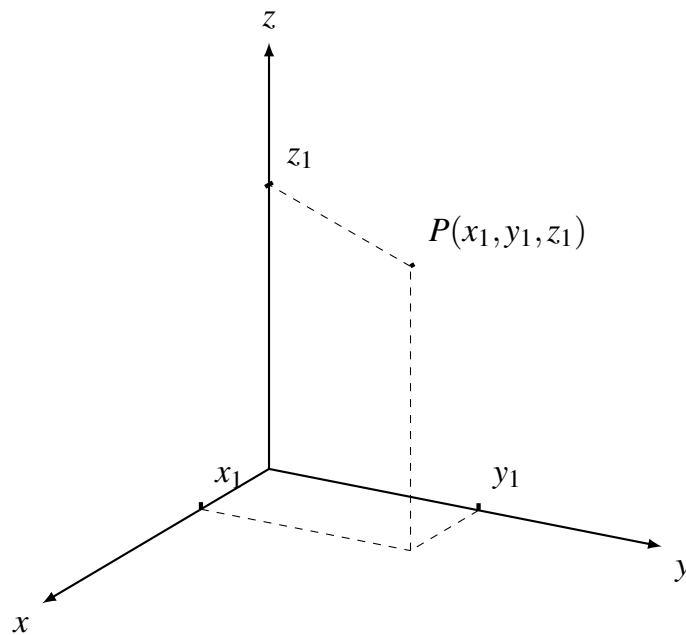


FIGURE 4.4 – Repérage par les coordonnées cartésiennes

4.3.2 Système de coordonnées cylindriques

Le repérage se fait aussi de la même manière qu'avec les coordonnées polaires en y ajoutant une troisième dimension qui mesure la hauteur du point par rapport au plan

repéré par les coordonnées polaires. Les relations sont les suivantes :

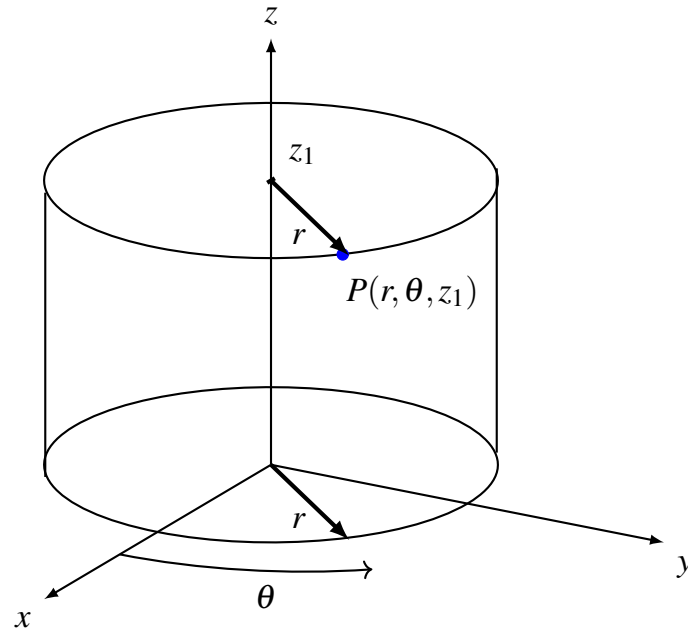


FIGURE 4.5 – Repérage par les coordonnées cylindriques

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \cot\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

Pour convertir les coordonnées cylindriques (r, θ, z) en coordonnées cartésiennes (x, y, z) nous utilisons les formules suivantes

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

4.3.3 Système de coordonnées sphériques

Un autre système de coordonnées analogue aux coordonnées polaires est l'ensemble des systèmes de coordonnées sphériques.

Plusieurs conventions et variantes existent, nous utiliserons celle utilisé par les géographes. Les relations sont les suivantes :

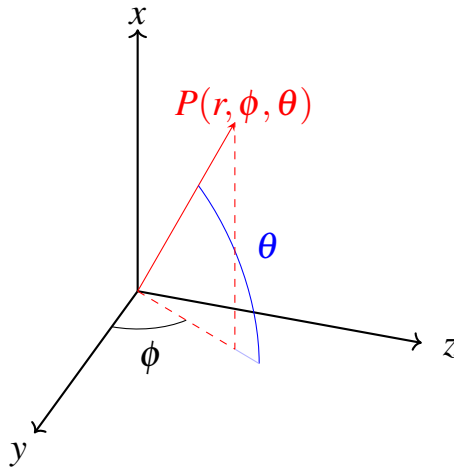


FIGURE 4.6 – Repérage par les coordonnées sphériques

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

Pour convertir, nous utilisons les formules suivantes

$$x = \rho \cos(\theta) \cos(\delta)$$

$$y = \rho \sin(\theta) \cos(\delta)$$

$$z = \rho \sin(\delta)$$

Exercice 4.1

Pourquoi utiliser les coordonnées sphériques, cylindriques ou polaires ?

4.4 Questions et réponses

Dans ce qui suit, plusieurs questions et réponses. Pour plus de détails, il faut assister au cours.

Supposons que la terre est une sphère ! Pour se repérer sur sa surface, de combien de coordonnées avons nous besoin ?

L'axe Oz passant par le pôle Nord, l'axe Ox dans le demi-plan du méridien de Greenwich et l'axe Oy à l'Est de l'axe Ox. Les coordonnées utilisées sont l'altitude h , la latitude l et la longitude λ qui sont reliées aux coordonnées sphériques, mesurées en

degrés.

Exercice 4.2

Quelle est la différence entre la latitude et l'altitude ?

Quelle est la représentation idéale de la surface de la terre ?

Pour répondre à cette question nous allons définir quelques notions importantes.

4.4.1 L'ellipsoïde

Nous avons déjà défini ce qu'est un ellipsoïde. Nous nous contenterons ici de définir l'ellipsoïde comme surface géométrique permettant de représenter assez fidèlement la forme du géoïde. On le définit comme une surface mathématique modélisant le géoïde. L'ellipsoïde s'obtient en faisant tourner une ellipse par rapport à un de ses deux axes. Un ellipsoïde est défini par les longueurs de ses demis axes, grand et petit.

Caractéristiques

L'ellipsoïde de révolution sera tel que :

- Le centre confondu avec l'origine O du référentiel géodésique
- Le petit axe avec l'axe Oz
- Aplatissement et taille proches de la forme de la terre

où

a = demi grand axe

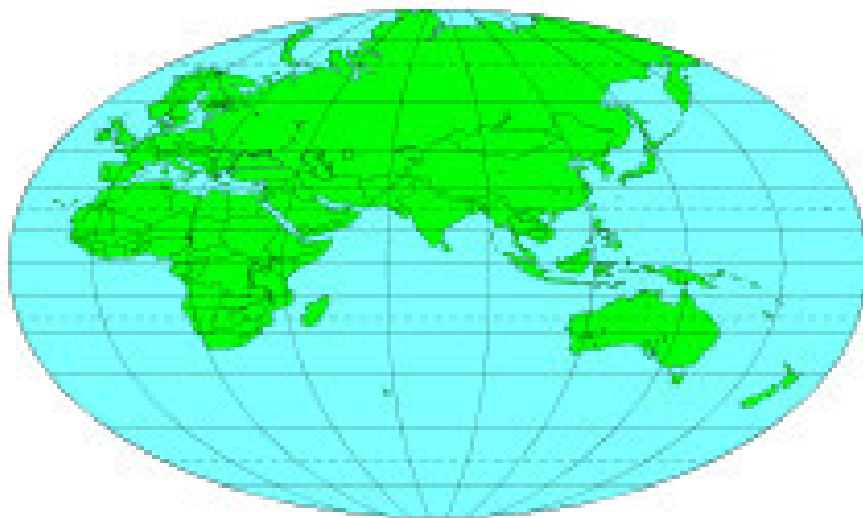
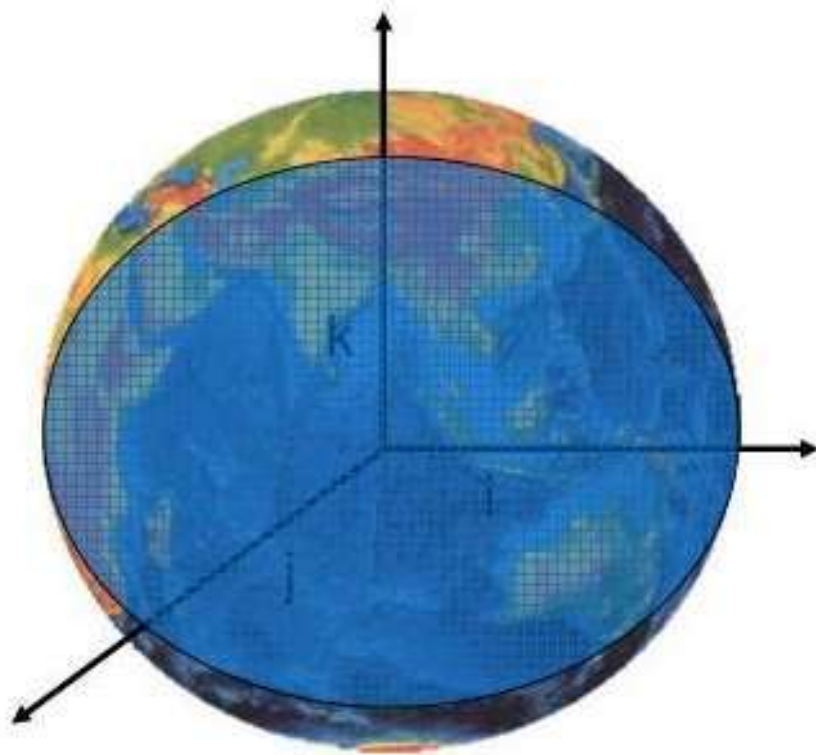
b = demi petit axe

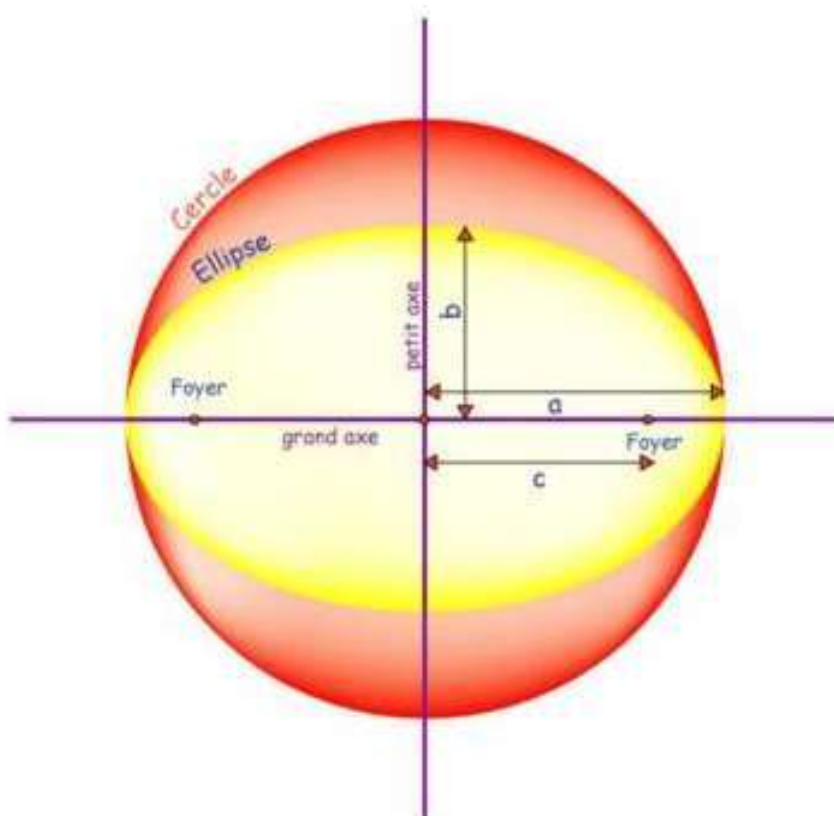
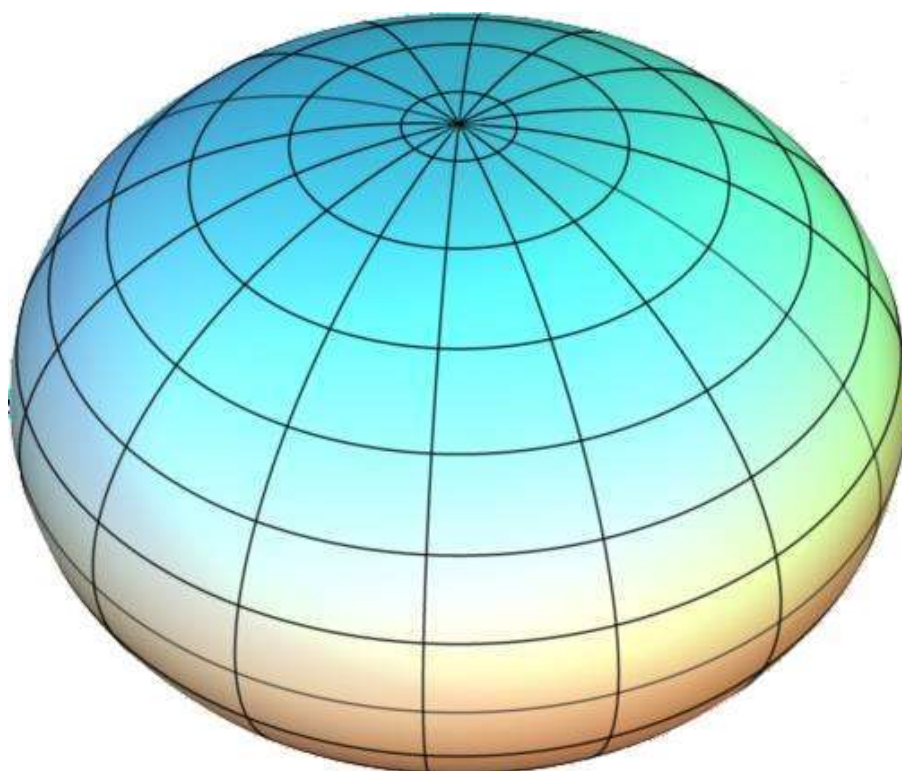
f = aplatissement $= (a - b) / a$

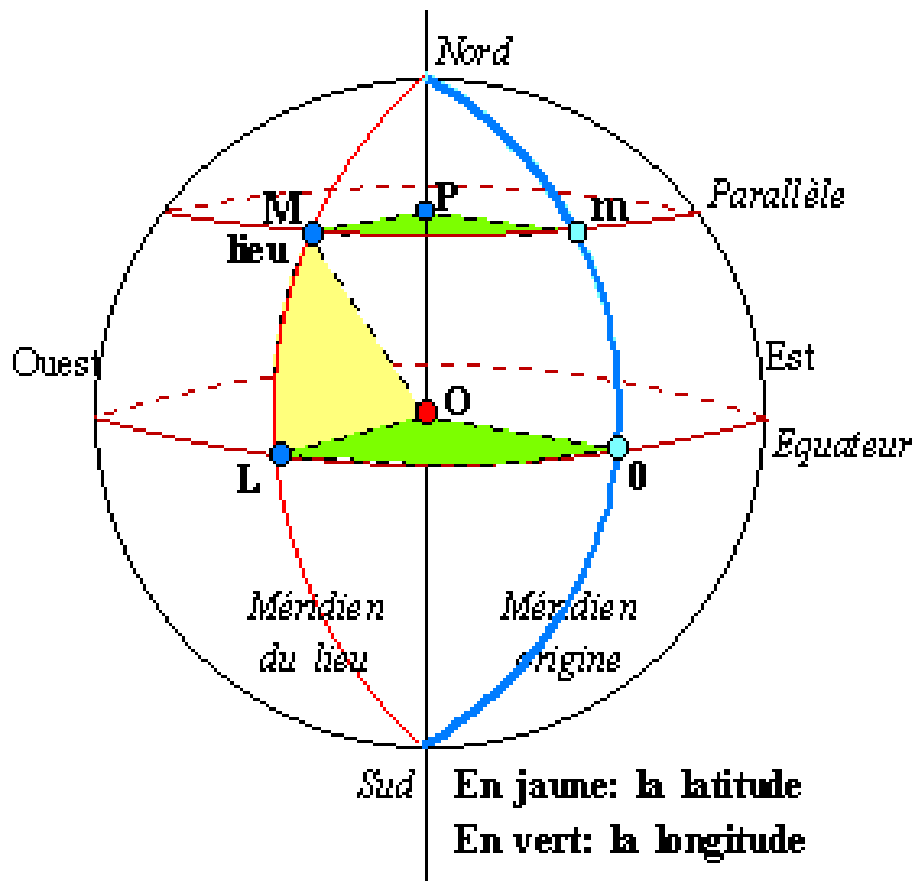
e = excentricité, c'est la position écartée des foyers de l'ellipse par rapport au centre du cercle.

$$e^2 = (a^2 - b^2) / a^2 = 2f - f^2$$

$$e'^2 = (a^2 - b^2) / b^2$$







4.5 Coordonnées géographiques

La sphère terrestre est coupée par l'équateur en deux demi-sphères Nord ou boréal et Sud ou austral.

D'autre part, elle est partagée d'Ouest en Est par le méridien qui passe par Greenwich, près de Londres en Grande Bretagne, repéré par l'arc en bleu à la figure ci-dessous.

En n'importe quel endroit de la surface de la terre passe un parallèle et un méridien.

La latitude est l'angle au centre du méridien, en jaune à la figure du lieu M formé par les rayons passant par ce lieu et par le point L d'intersection du méridien du lieu avec l'équateur, donc angle MOL . La plus grande est $+90^\circ$, au pôle Nord et la plus petite est -90° , au pôle Sud. Tous les lieux d'un même parallèle ont la même latitude : 0° à l'équateur et respectivement 90° et -90° , pour les pôles Nord et Sud. Pratiquement, l'angle de latitude est mesuré à l'aide d'un sextant et de tables numériques, etc.

La longitude est l'angle au centre (en vert à la figure) du grand cercle équatorial de centre O formé par les rayons passant, d'une part, par le point d'intersection 0 de l'équateur et du méridien origine et, d'autre part, par le point d'intersection L du méridien du lieu avec l'équateur. Ceux situés à l'ouest du méridien origine ont une longitude po-

sitive de 0° à 180° , notée Ouest. A l'est, elle est négative de 0° à -180° , notée Est. La plus grande longitude est $+180^\circ$. La longitude est la même partout sur un même méridien, elle est de 0° pour celui qui passe par Greenwich.

N.B. : La longitude est aussi la mesure de l'angle au centre du parallèle, petit cercle de centre P , du lieu M formé par les rayons passant par ce lieu et par le point d'intersection m du parallèle du lieu avec le méridien origine, en vert à la figure ci-dessous. l'angle MPm est égal à l'angle $LO0$. En pratique, cette mesure est calculée à l'aide d'une horloge très précise et de tables numériques, ou en utilisant le repérage par G.P.S.

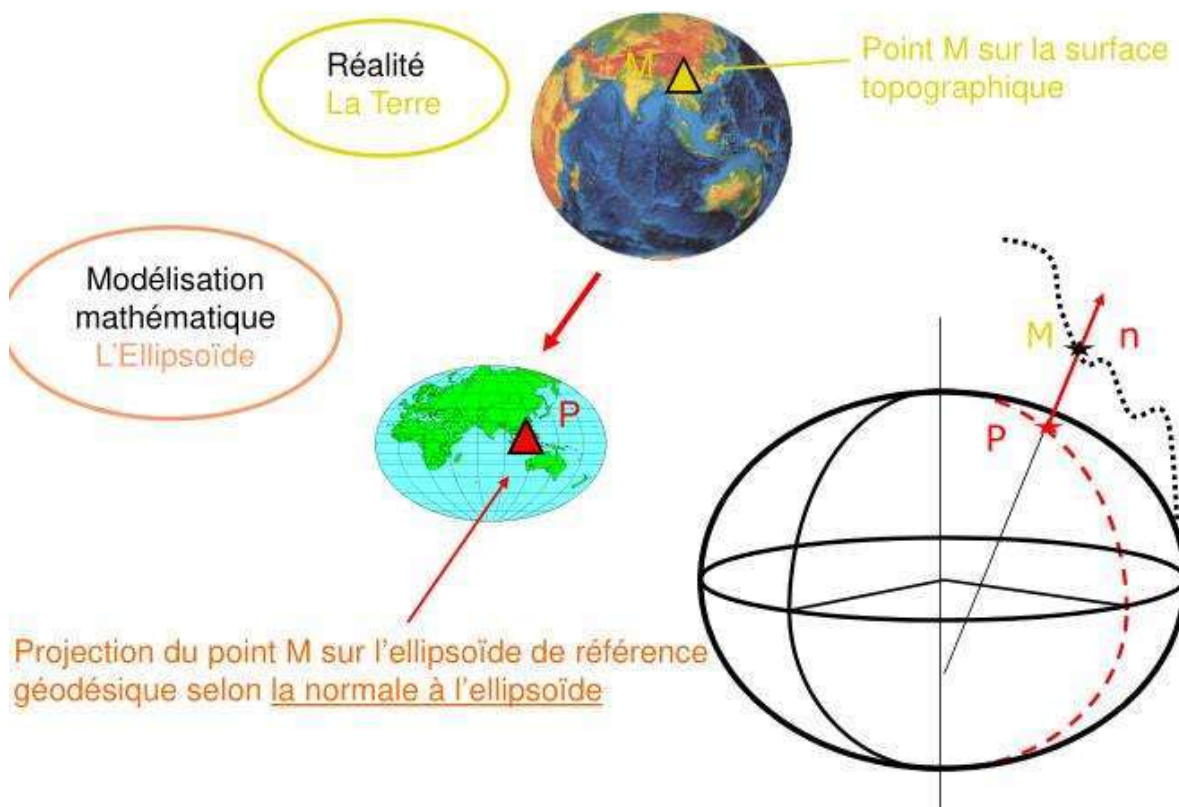


FIGURE 4.7 – Différentes Modélisations de la terre

Question : Comment mesurer la hauteur ? C'est-à-dire la distance entre M et P à la Figure 4.7.

Nous devons définir la notion d'altitude. Les aménageurs de territoire ayant besoin d'une référence, nous allons donc utiliser « éloignement par rapport au niveau de la mer » comme référence.

Cette définition doit répondre aux critères suivants :

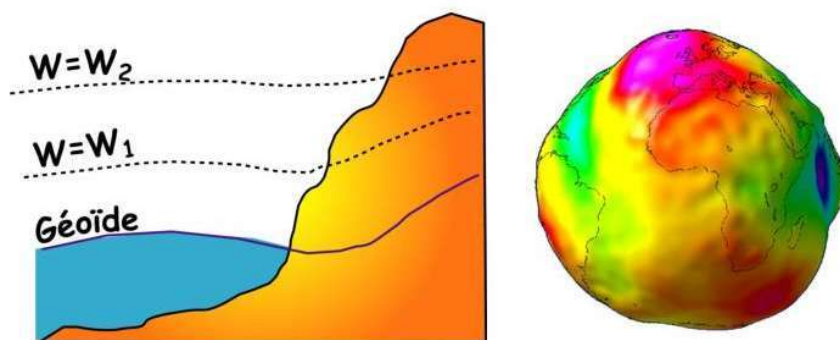
- exprimée en m ,
- nulle à la surface de la mer,
- permettre à l'eau de couler dans le bon sens,

- constante sur une surface horizontale,
- les différences d'altitudes doivent être proches des dénivelées mesurées.

4.5.1 Le géoïde

Les géoïdes sont des représentations gravitationnelles de la surface de la Terre, c'est-à-dire la surface où la pesanteur est constante proche du niveau moyen des mers. La forme des géoïdes est complexe et ne peut être formulée mathématiquement de façon simple. Elle n'est donc pas utilisée en cartographie pour le repérage de la latitude et la longitude.

Cette surface irrégulière étant difficile à calculer, on préfère alors opter pour un ellipsoïde, surface régulière qui lorsqu'elle est bien choisie (centre, dimensions, orientation...) s'écarte au maximum de quelques dizaines de m du géoïde, quel que soit le point considéré à la surface de la Terre, voir système géodésique. Cette erreur est visible sur certains appareils G.P.S. : Ceux-ci ne permettant de mesurer que la distance par rapport au centre de la terre, les appareils utilisant l'approximation ellipsoïdale présentent une erreur dans leurs calculs d'altitude que nous expliquerons au cours.



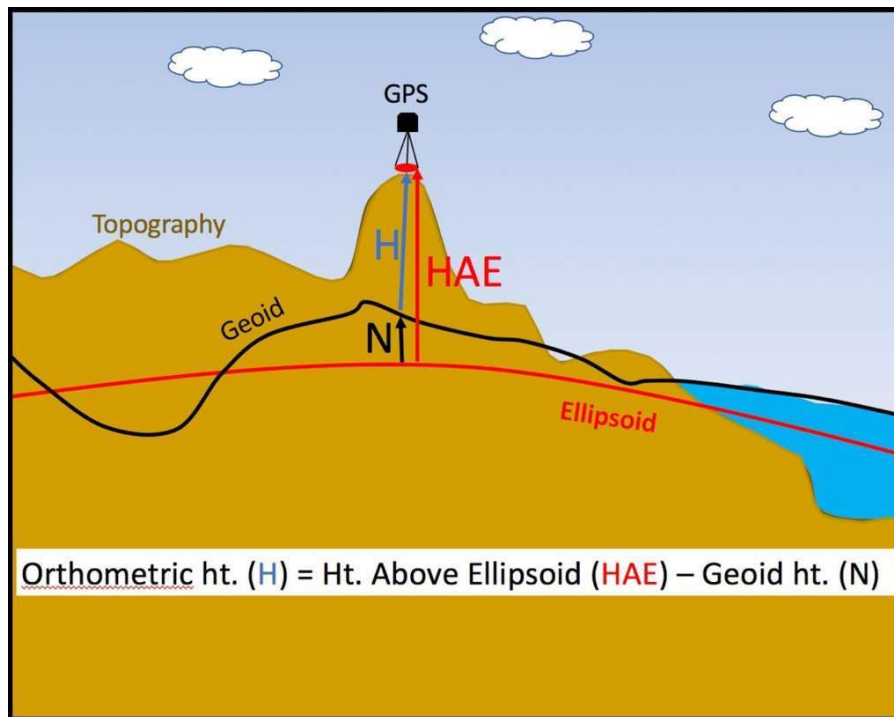


FIGURE 4.8 – Calcul de l'altitude

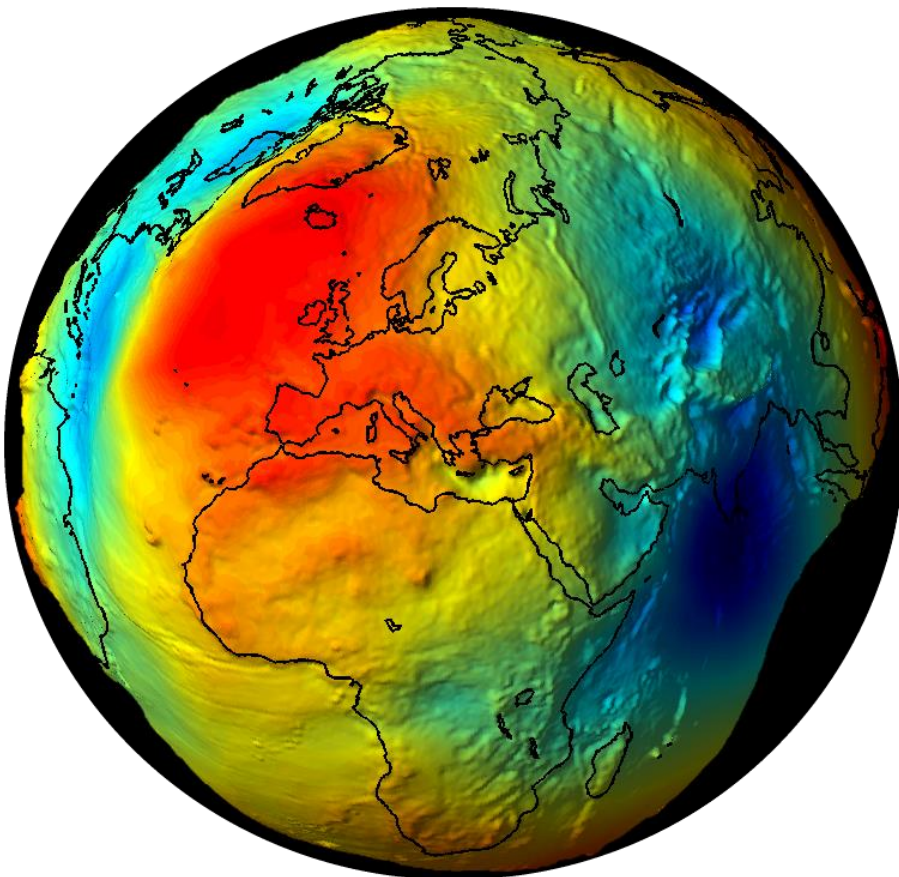
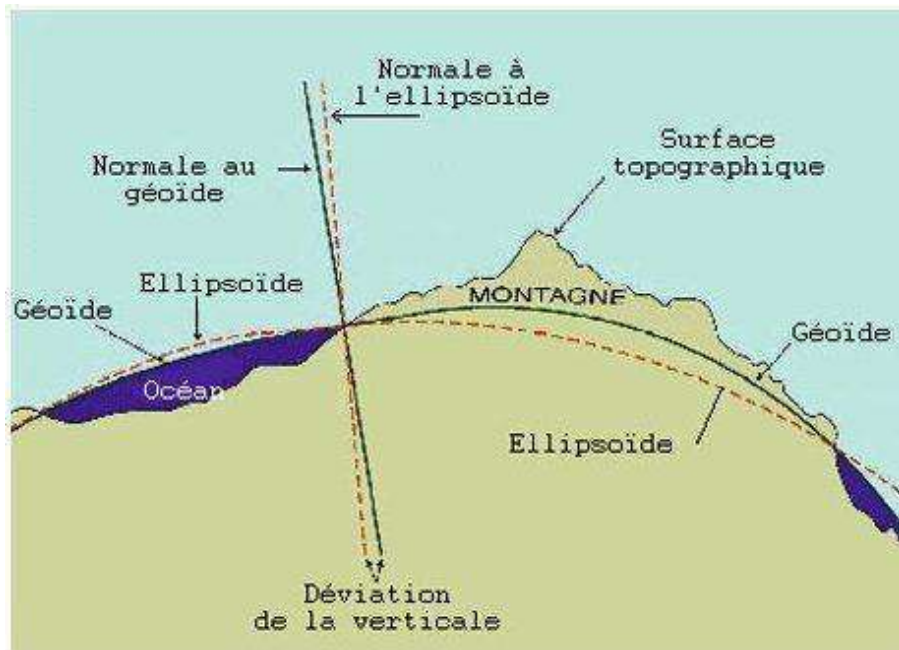
La hauteur orthométrique est donnée par la relation

$$H = HAE - N,$$

voir la Figure 4.8 ci-dessous.

Remarque 4.3

Le géoïde est la surface équipotentielle particulière du champ de pesanteur terrestre assimilable en dehors des terres émergées au niveau des mers.



Transformations isométriques

Plusieurs prérequis sont indispensables pour définir rigoureusement les notions de ce chapitre. En effet, nous n'avons pas parlé d'espace euclidien, d'espace vectoriel, de groupe, de corps, etc.

Par exemple : Les applications définies ci-après ne sont pas que des applications vectorielles mais parfois affines car le centre des rotations peut ne pas être l'origine, ...

On se contente de définir brièvement les transformations. On donnera plus tard un cadre plus "mathématique" aux notions évoquées.

5.1 Transformations isométriques

Définition 5.1

Une application f associe à chaque point M du plan ou de l'espace un point $M' = f(M)$. Chaque point du plan ou de l'espace a une et une seule image.

Définition 5.2

Par une application bijective, chaque point du plan (ou de l'espace) a un et un seul antécédent. L'inverse f^{-1} de f est l'application qui associe à chaque M' son antécédent $M' = f^{-1}(M)$. C'est le retour à la position initiale¹.

Définition 5.3

On appelle point invariant par la transformation tout point dans l'image par l'application de transformation est lui-même. C est fixe (ou invariant) par une application f s'il vérifie $f(C) = C$.

¹L'application f^{-1} n'est qu'une notation mais ne veut absolument pas dire $1/f$

Définition 5.4

Une isométrie transforme une droite en une droite, deux droites parallèles en deux droites parallèles et conserve le produit scalaire, les angles géométriques et les milieux.

Nous dirons par la suite, transformation pour une application bijective du plan, ou de l'espace.

5.1.1 Identité

Définition 5.5

On appelle identité, on noté Id , l'application f du plan telle que, pour tout point M , $f(M) = M$.

Remarque 5.6

Par l'identité, tout le plan est invariant.

5.1.2 Déplacements et antidéplacements

Si la transformation isométrique conserve les mesures des angles orientés, on dit que c'est un déplacement. Par contre, c'est un antidéplacement si les angles orientés sont changés en leurs opposés.

Proposition 5.7

Toute isométrie de plan est soit un déplacement soit un antidéplacement.

Réflexion 5.8

Pourquoi on a dit dans la proposition précédente : isométrie du plan ? Que se passe-t-il de différent dans l'espace ?

5.1.3 Réflexion

Définition 5.9

Soit (D) une droite du plan. On appelle symétrie orthogonale par rapport à (D) ou réflexion d'axe (D) , et on note σ_D , l'application du plan affine dans lui-même qui à un point M associe le point M' tel que

- *le milieu de $[MM']$ appartient à (D)*
- *la droite (MM') est perpendiculaire à (D) .*

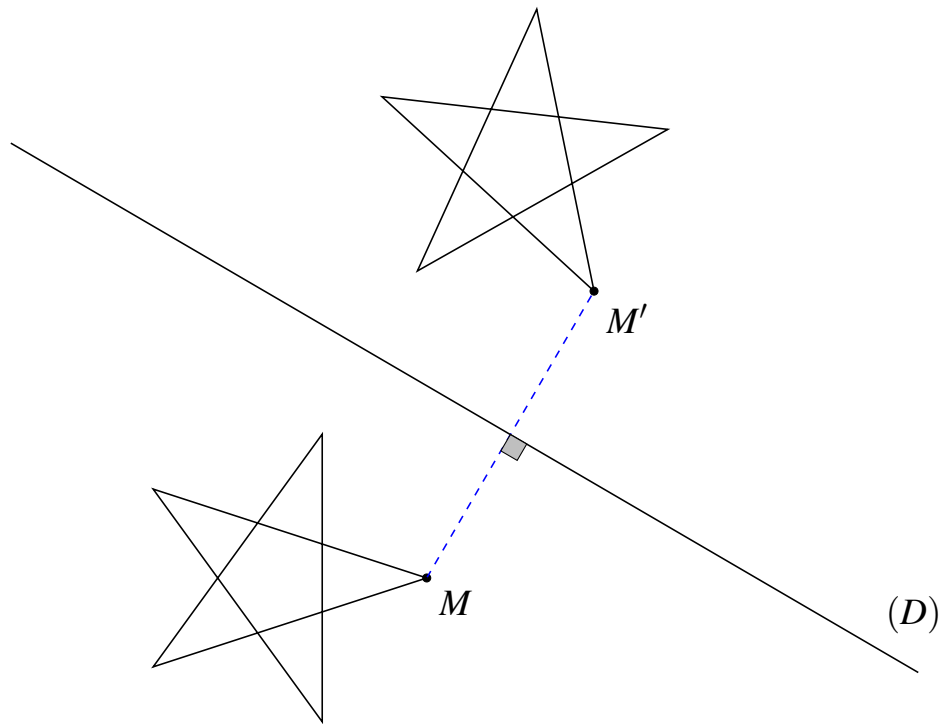


FIGURE 5.1 – Réflexion d'un polygone

Proposition 5.10

Soit une droite (D) du plan. Il existe une unique application f du plan dans lui-même, telle que :

- l'image de chaque point de la droite est lui-même
- l'application f change les côtés de (D)
- L'application f laisse invariants les droites perpendiculaires à (D) et les cercles dont le centre est sur (D) .

Proposition 5.11

La composée de la symétrie axiale par rapport à une droite (D) avec elle-même est une identité.

Remarque 5.12

La réflexion est un antidéplacement.

5.1.4 Rotation

Une rotation dans le plan est une composée de deux réflexions d'axes non parallèles. L'identité est une rotation.

Définition 5.13

On appelle rotation de centre O et d'angle θ qu'on note $\rho(O, \theta)$, l'application du plan

dans lui-même qui fixe O et qui, à M distinct de O , associe M' vérifiant $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.

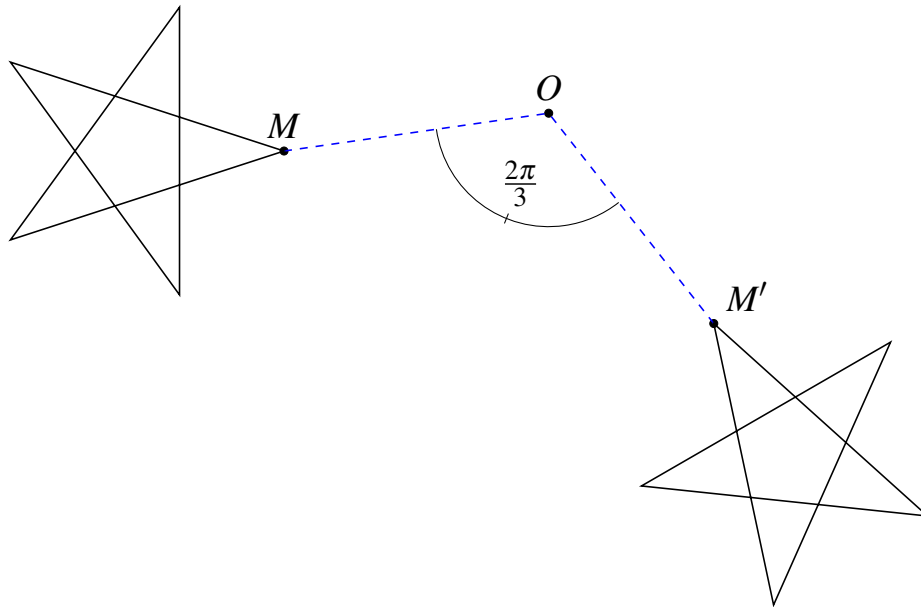


FIGURE 5.2 – Rotation de centre O et d'angle $\theta = 2\pi/3$

Proposition 5.14

Le centre d'une rotation, autre que l'identité, est l'unique point fixé par la rotation.

Théorème 5.15

La composée de deux symétries axiales d'axes concourant en un point I est une rotation de centre I .

Corollaire 5.16

Toute rotation $r(I, \theta)$ se décompose en deux symétries d'axes concourants en I , d'angle $\theta/2$, l'un étant choisi arbitrairement.

Proposition 5.17

La rotation est un déplacement.

Définition 5.18

On dit qu'une rotation ρ est d'ordre fini s'il existe un entier naturel k non nul tel que ρ^k est l'identité. L'ordre de ρ est alors le plus petit entier naturel n non nul tel que ρ^n est l'identité.

Réflexion 5.19

Quel est l'ordre de l'identité ?

5.1.5 Symétrie centrale

La symétrie centrale est une rotation d'angle π .

Définition 5.20

On appelle *symétrie centrale de centre C* l'application du plan affine dans lui-même qui à un point M associe le point M' vérifiant $\overrightarrow{CM'} = -\overrightarrow{CM}$. On la note σ_C .

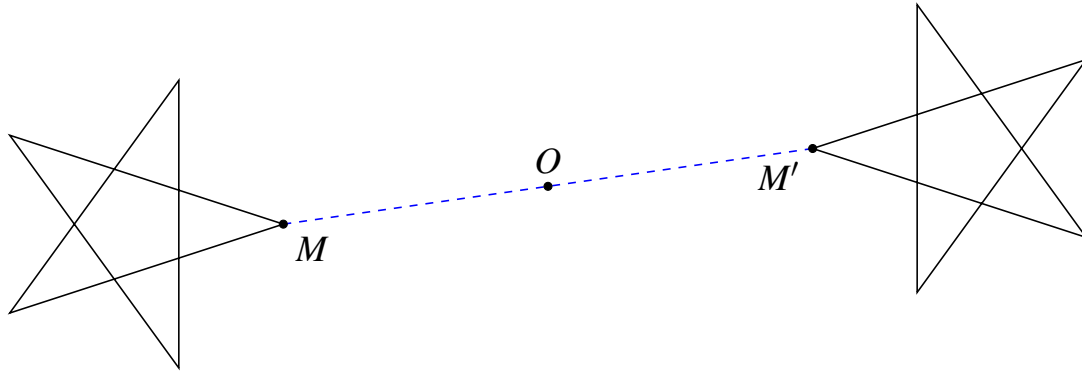


FIGURE 5.3 – Symétrie de centre O

Réflexion 5.21

La symétrie centrale est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?

5.1.6 Translation

La translation est une transformation qui déplace chaque point d'une figure avec la même distance dans une direction donnée.

Définition 5.22

On appelle *translation de vecteur $\vec{u}$* l'application du plan affine P dans lui-même qui à un point M associe le point M' vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On la note $t_{\vec{u}}$.

Proposition 5.23

La composée de deux translations de vecteurs respectifs V_1 et V_2 est une translation de vecteur $V_1 + V_2$.

Réflexion 5.24

La translation est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?

Proposition 5.25

La composée d'une réflexion et d'une translation est :

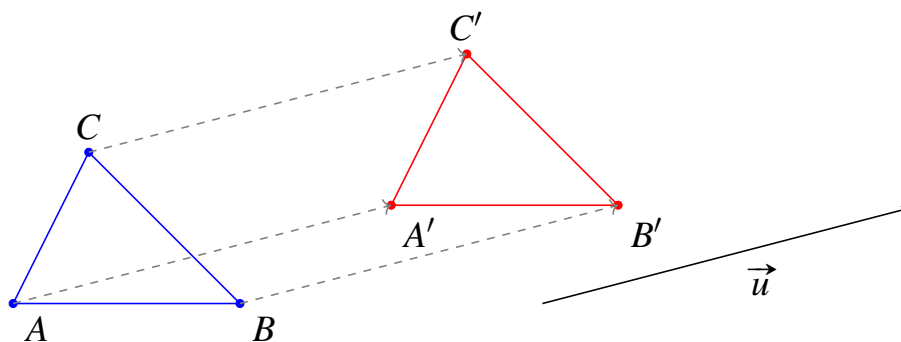


FIGURE 5.4 – Translation.

- Une autre réflexion d'axe parallèle lorsque le vecteur de translation est normal à l'axe de symétrie.
- Sinon, une symétrie glissée.

5.1.7 Symétrie glissée

Définition 5.26

On appelle symétrie glissée la composée d'une réflexion et d'une translation de vecteur dirigeant l'axe de la réflexion.

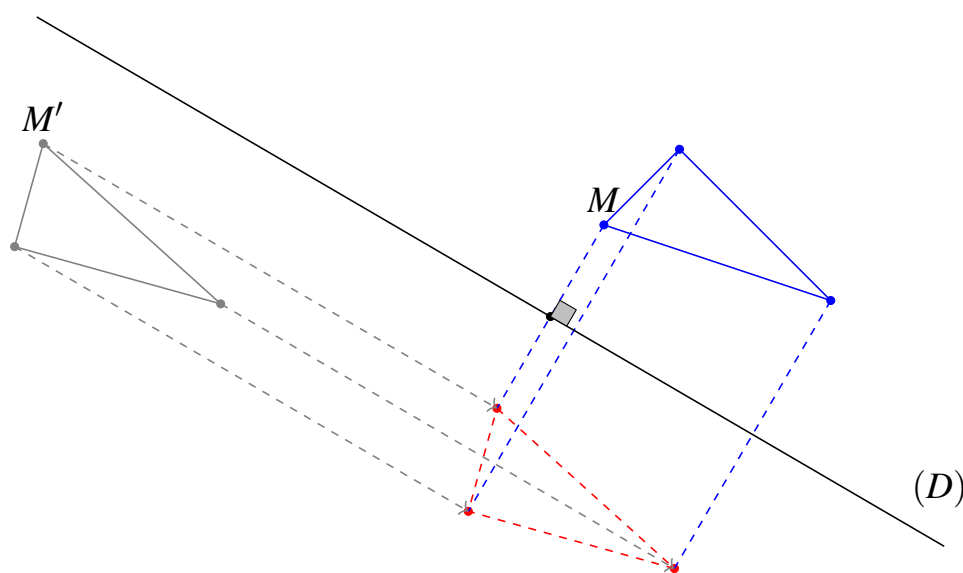


FIGURE 5.5 – Symétrie glissée d'un triangle

Remarque 5.27

La symétrie glissée est une composition de deux isométries, c'est un anti-déplacement.

Proposition 5.28

La composée d'une rotation et d'une réflexion, ou le contraire, est une symétrie glissée.

Proposition 5.29

La composée d'une réflexion d'axe D_1 et d'une translation de vecteur u , supposé non parallèle à D_1 , est toujours une symétrie glissée d'axe D et de vecteur v . De plus, D et v sont uniques.

Remarque 5.30

En général, l'ordre de composition des transformations isométriques est important car cette opération n'est pas toujours commutative :

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Exercice 5.31

Donner un exemple de composition commutative et un autre pour une composition non commutative.

Théorème 5.32

La composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation.

Corollaire 5.33

Toute translation se décompose en deux symétries d'axes parallèles, l'un étant choisi arbitrairement perpendiculaire au vecteur de translation.

De ce qui précède, les transformations suivantes sont des isométries : La translation, la symétrie centrale, la symétrie axiale ou réflexion et la rotation.

Proposition 5.34

Par une isométrie, l'image d'une droite est une droite et l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

Proposition 5.35

La composée de deux isométries est une isométrie.

Proposition 5.36

Toute isométrie est une composition de symétries axiales (une ou plusieurs) et éventuellement une identité.

Proposition 5.37

La composée de deux rotations d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une rotation d'angle $\theta = \theta_1 + \theta_2$ ou une translation.

Exercice 5.38

- Comment déterminer le centre de la composée des rotations dans le cas où $\theta = \theta_1 + \theta_2 \neq 2\pi k$?

— Comment déterminer le vecteur de translation dans l'autre cas ?

Théorème 5.39

Toute isométrie du plan est une composition d'au plus trois réflexions.

Théorème 5.40 (Reconnaissance des isométries selon les points invariants)

- Si f admet trois points invariants non alignés alors $f = Id$.
- Si f est différente de Id et admet deux points invariants distincts A et B alors f est une symétrie d'axe (AB) .
- Si f admet un seul point invariant, alors f est une rotation de centre ce point.
- Si f n'admet aucun point invariant, alors f est une translation ou une symétrie glissée.

Exercice 5.41

Démontrer d'une façon géométrique simple pourquoi la composition d'une rotation et d'une réflexion est une symétrie glissée.

Exercice 5.42

Existe-t-il d'autres isométries à part celles étudiées ?

5.2 Expression analytique des isométries

Dans cette section, nous introduisons quelques expressions analytiques des transformations isométriques. Dans un premier lieu, nous supposons que le centre des rotations est l'origine du repère orthonormé et que la droite de la réflexion passe par l'origine.

Un vecteur en mathématiques n'est pas caractérisé par un point de départ² comme en physique par exemple. Donc tous les vecteurs ayant les mêmes autres caractéristiques – hormis le point – congruent.

En d'autres termes, le translaté d'un vecteur est lui-même. Nous allons donc écrire les formules pour les points seulement. Nous verrons le cas général dans les sections suivantes.

²Dans un espace vectoriel.

5.2.1 Expression de l'identité

Soit un point $A = (x, y)$ et son image $A' = (x', y')$ par l'application identité, alors

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y. \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2.2 Expression de translation

Soit un point $A = (x, y)$ et son image $A' = (x', y')$ par la translation de vecteur V de composantes (v_1, v_2) , alors on retrouve aisément les relations suivantes

$$\begin{cases} x' = x + v_1 \\ y' = y + v_2, \end{cases} \quad (5.2)$$

Remarque 5.43

La coordonnée x' s'écrit en fonction de x et y mais sous la forme d'une somme. Ce n'est pas une relation linéaire.

5.2.3 Expression de rotation

Soit A un point de coordonnées (x, y) et A' son image par la rotation de centre O et d'angle θ de coordonnées (x', y') .

D'après le chapitre 2, on écrit

$$x = r \cos(\alpha)$$

$$y = r \sin(\alpha)$$

et

$$x' = r \cos(\beta)$$

$$y' = r \sin(\beta),$$

où $\alpha = (Ox, OA)$ et $\beta = \alpha + \theta$.

Après certaines relations trigonométriques élémentaires, on aura

$$\begin{cases} x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta). \end{cases} \quad (5.3)$$

Exercice 5.44

Détailler le passage ci-dessus, tout en indiquant les relation trigonométriques utilisées.

5.2.4 Expression de réflexion

Réflexion de droite Ox

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases} \quad (5.4)$$

Réflexion de droite Oy

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases} \quad (5.5)$$

Réflexion de droite $y = x$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases} \quad (5.6)$$

Réflexion de droite $y = mx$

$$\begin{cases} x' = \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}y \\ y' = \frac{2m}{1+m^2}x + \frac{1-m^2}{1+m^2}y. \end{cases} \quad (5.7)$$

Exercice 5.45

Démontrer les relations précédentes.

5.2.5 Expression de symétrie

Symétrie de centre O

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases} \quad (5.8)$$

Symétrie de centre $C(a, b)$

$$\begin{cases} x' - a = -(x - a) \\ y' - b = -(y - b). \end{cases} \quad (5.9)$$

Matrices et transformations

En règle générale, les transformations précédentes sont soit des applications linéaires, soit des applications affines. Pour des raisons pédagogiques, nous nous contentons de les écrire sous formes de matrices sans pour autant définir les structures des espaces utilisés. Pour cela, nous aurons besoin de définir les vecteurs, les matrices et les coordonnées homogènes.

6.1 Points et vecteurs

Un vecteur est défini par trois caractéristiques : direction, sens et longueur ou norme.

En mathématiques, l'ensemble des vecteurs muni de certaines structures et propriétés est noté espace vectoriel. En ajoutant des points, il devient espace affine. On définit respectivement les applications linéaires et les applications affines par des transformations de vecteurs ou points d'un espace à un autre.

Pour les architectes, il suffit de savoir manipuler les vecteurs de l'espace qu'ils ont l'habitude de désigner par une flèche dont les deux extrémités sont deux points.

On note un vecteur $\vec{V}$ de composantes v_1, v_2, v_3 par

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Le point A de coordonnées x, y, z est écrit sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

6.2 Matrices

Une matrice est un arrangement de n lignes et de p colonnes de chiffres, nombres, lettres, symboles, etc. L'élément a_{np} est situé à l'intersection de la n -ème ligne et de la p -ème colonne.

Exercice 6.1

Donner quelques exemples de matrices.

On dit que la matrice est de taille $n \times p$, et on lit " n croix p " et on respecte l'ordre de lecture.

Les informations que contiennent les matrices servent dans plusieurs domaines et ont plusieurs significations selon le contexte et la discipline utilisée.

Nous introduisons quelques relations et compositions de matrices et donnons ensuite quelques applications.

Définition 6.2

On note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Remarque 6.3

On peut changer l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par n'importe quel ensemble vérifiant certaines propriétés¹.

¹C'est la structure de corps.

6.3 Matrices particulières

6.3.1 Matrices colonnes

Ce sont les matrices à une colonne

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

6.3.2 Matrices lignes

Ce sont les matrices à une ligne : $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

6.3.3 Matrices carrées

Elles ont même nombre de lignes et de colonnes qui s'appelle ordre de la matrice. Les coefficients ayant même indice de ligne et de colonne s'appellent les coefficients diagonaux.

Définition 6.4

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

6.3.4 Matrice identité

C'est la matrice dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres sont nuls. On note I_n la matrice identité d'ordre n .

6.3.5 Matrice nulle

C'est la matrice non nécessairement carrée dont tous les coefficients sont nuls.

6.4 Calcul matriciel

6.4.1 Égalité de matrices

Deux matrices A et B sont égales, noté $A = B$, si

- elles ont même nombre de lignes,
- elles ont même nombre de colonnes,
- les coefficients à la même position sont égaux.

6.4.2 Addition de matrices

Si A et B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, la somme $A + B$ est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ dont chaque coefficient est la somme des coefficients de même position de A et de B .

Remarque 6.5

La somme de matrices de tailles différentes n'existe pas et n'est pas définie. De plus, il n'est pas possible d'additionner une matrice et un nombre réel.

Proposition 6.6

La matrice nulle est l'élément neutre pour l'addition.

L'addition de matrices est commutative et associative.

6.4.3 Produit d'une matrice par un nombre réel

Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel. On appelle produit (externe) de λ par A , noté λA , la matrice dont chaque coefficient est obtenu en multipliant le coefficient de même position de A par λ .

Proposition 6.7

Soient A et B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ et μ deux nombres réels, alors

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$
- $1A = A$

Remarque 6.8

On note $-A$ le symétrique de A par rapport à l'addition. Il est égal en réalité à $(-1) \cdot A$.

6.4.4 Produit de deux matrices

Le produit de deux matrices ne se définit que si le nombre de colonnes de la première matrice est le même que le nombre de lignes de la deuxième matrice, on dit qu'elles sont de type compatible.

Si $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_{mn}(\mathbb{R})$ et si $B = (b_{ij})$ une matrice de $M_{np}(\mathbb{R})$ alors leur produit, noté $AB = (c_{ij})$ est une matrice de $M_{mp}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

La cellule c_{ij} est le produit scalaire entre la i -ème ligne de A et la j -ème colonne de B .

Remarque 6.9

En général, le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

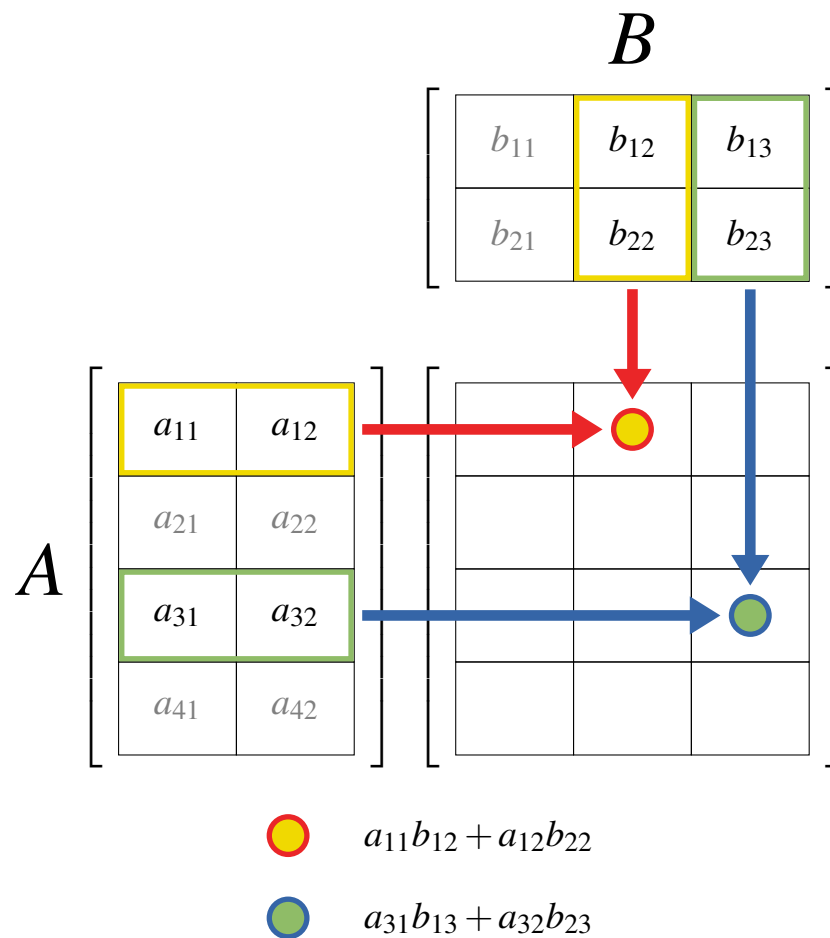


FIGURE 6.1 – Exemple de produit de matrices

6.5 Déterminant de matrice

On associe à chaque matrice un nombre permettant de déterminer si elle est inversible : le déterminant qui n'est défini que si la matrice est carrée.

Définition 6.10

Soit A une matrice carrée de $M_2(\mathbb{R})$, telle que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

6.6 Matrice inverse

Si x est un réel non nul, il admet un inverse $y = 1/x$ tel que $xy = 1$ et par commutativité du produit, $yx = 1$. La multiplication n'étant pas commutative dans $M_n(\mathbb{R})$, il faut définir l'inverse de la façon suivante.

Définition 6.11

Une matrice carrée A de $M_n(\mathbb{R})$ est dite inversible si elle admet un inverse à droite et à gauche. Cet inverse est alors unique. On note A^{-1} l'inverse de la matrice inversible A . On a $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

Remarque 6.12

A^{-1} est une notation qui ne veut pas dire $\frac{1}{A}$.

Définition 6.13 (Mineur de matrice)

On appelle mineur M_{ij} de la matrice A , la matrice obtenue à partir de A en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne.

Définition 6.14 (cofacteur)

On appelle cofacteur de l'élément a_{ij} de la matrice A le mineur M_{ij} de la matrice A .

Définition 6.15 (Comatrice)

On appelle comatrice ou matrice adjointe de A la matrice $\text{com}(A)$ définie par :

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \dots & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

où Δ_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} de A défini à partir du mineur $|M_{ij}|$ par la relation : $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$.

Définition 6.16 (Matrice transposée)

On appelle matrice transposée de A , noté tA , la matrice B telle que $b_{ij} = a_{ji}$, c'est-à-dire que nous changeons les lignes par les colonnes.

Définition 6.17

Si A est inversible, sa matrice inverse est donnée par la relation suivante :

$$A^{-1} = \frac{{}^t\text{com}(A)}{\det A}, \text{ si } \det A \neq 0$$

Exercice 6.18

Donner la formule générale d'inversion d'une matrice d'ordre 2.

6.7 Applications linéaires/affines et matrices

Une application linéaire f réduite à sa forme la plus simple, c'est-à-dire dans le plan et l'espace euclidien

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow (x', y', z') \end{aligned}$$

Proposition 6.19

Une application linéaire est complètement déterminée par les données des images des vecteurs de la base.

6.7.1 Matrice d'une application

Soient l'espace $\mathbb{R}^3$ et ces vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. Soit f une application linéaire de l'espace dans lui-même.

Pour tout vecteur² v de la forme $v = {}^t(v_1, v_2, v_3) = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$, l'application f lui fait correspondre le vecteur w tel que :

$$w = f(v) = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$$

avec

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3$$

$$w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3$$

$$w_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3$$

Définition 6.20 (Notation matricielle)

La notation matricielle du système précédent est :

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

On note

$$w = Mv,$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

et on dit matrice M de l'application linéaire f .

Remarque 6.21

Les colonnes de M sont formées des $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$ les images écrites dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

²En réalité, on écrit $\vec{v}$. Mais, par abus de langage et pour alléger les écritures, nous allons nous contenter ici d'écrire v pour désigner $\vec{v}$.

Remarque 6.22

Si A et B représentent respectivement les applications linéaires f et g , alors AB représente la composition des applications $f \circ g$.

6.7.2 Matrice de rotation

D'après les relations du chapitre précédent, on sait que la rotation de centre l'origine et d'angle θ autour du vecteur $\vec{k}$ est :

$$\begin{cases} x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ z' = z \end{cases} \quad (6.3)$$

Sa matrice est donc

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

6.7.3 Matrice de symétrie centrale

L'inversion est définie par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.7.4 Matrice de réflexion

La matrice de réflexion par rapport à l'axe OX est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.7.5 Matrice de translation ?

Contrairement à la rotation de centre "l'origine" ou à l'homothétie, la translation n'est pas une transformation linéaire. L'origine n'est pas un point invariant. Il n'est pas possible de le représenter par la multiplication d'une matrice carrée comme pour les autres transformations. Un autre outil est nécessaire.

Réflexion 6.23

Qu'en est-il de la symétrie glissée ?

6.8 Transformations et coordonnées homogènes

Ce système est utilisé en géométrie projective principalement.

6.8.1 Matrice de translation

La matrice traduisant une translation dans l'espace écrite sous la forme d'un vecteur (v_1, v_2, v_3) est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

L'image d'un point de coordonnées $(x, y, z, 1)$ par la translation citée ci-dessus est (x', y', z', s) , calculée par multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

ce qui donne bien l'expression analytique de la translation précédemment montrée.

$$\begin{cases} x' = x + v_1 \\ y' = y + v_2 \\ z' = z + v_3 \\ s = 1 \end{cases} \quad (6.7)$$

6.8.2 Matrices des transformations affines

Toute transformation affine est composée d'une application linéaire décrite par une matrice cube et de la translation amenant l'origine du repère à son image.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & v_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & v_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & v_3 \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

où la sous-matrice

$$S_m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

représente l'application linéaire en question.

Le système précédent est applicable à toutes les autres transformations. Il suffit de décomposer la transformation en une application linéaire et une translation.

Exemple 6.24

Nous avons vu que la matrice de rotation dans le plan s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

La sous-matrice s'écrit donc

$$S_m = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

La matrice de rotation en coordonnées homogènes devient

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

Remarque 6.25

- Une sous-matrice correspond à une application linéaire.
- La dernière colonne de droite correspond au vecteur de translation.
- Le vecteur de translation peut être nul.
- La matrice globale correspond à une application affine qu'elle soit isométrique ou non.

Exercice 6.26

Ecrire les matrices correspondantes aux changements de base : translation de l'origine du repère, changements des vecteurs de la base, ...

Exercice 6.27

Soit la droite D d'équation $y = 2x + 3$.

- 1. Peut-on donner la matrice de réflexion par rapport à cette droite ? Et en coordonnées homogènes ?*
- 2. Donner la matrice de translation de vecteur $\vec{u}$ pour que l'image de l'origine appartienne à la droite D .*
- 3. Quelle est l'équation de la droite D dans le nouveau repère.*
- 4. Ecrire la matrice de réflexion par rapport à la nouvelle droite.*
- 5. Faire une translation inverse de vecteur $\vec{u}$.*
- 6. Dédire le produit à faire pour obtenir la réflexion par rapport à D en coordonnées homogènes sans changement de repère.*

6.8.3 Caractérisation des applications isométriques

Une isométrie est caractérisée par son déterminant qui a deux valeurs possibles 1 et -1 . En effet, un déterminant différent de ces valeurs ci ne conserve pas les longueurs.

Exercice 6.28

Expliquer pourquoi une isométrie a nécessairement un déterminant de valeur 1 ou -1 .

6.8.4 Composition de transformations

La représentation sous forme de produit de deux matrices permet de composer les transformations affines.

D'une manière générale, la composition de deux matrices s'écrit :

$$M = M_2 M_1$$

La transformation affine M_1 est la première appliquée, ensuite M_2 .

Exercice 6.29

Calculer le produit AB puis BA tel que A est la matrice de rotation d'angle $\pi/2$ et B est la matrice de translation de vecteur $\vec{V} = (1, 0, 0)$. Calculer l'image des points $a = (1, 0, 0)$ et $b = (2, 1, 0)$ par les deux matrices résultantes. Que peut-on conclure ?

6.9 Applications des matrices et des transformations

6.9.1 Frises

Définition 6.30 (Bande du plan)

La zone du plan P comprise entre deux droites parallèles, qu'on notera B .

Définition 6.31 (Frise)

Un ornement linéaire ou frise est un dessin F de B dont le groupe des translations $T(F)$ de l'ensemble des isométries $Is(F)$ est de la forme $\{t_n \vec{u}, n \in \mathbb{Z}\}$ où $\vec{u}$ est un vecteur non nul.

Remarque 6.32

On dit que F est une frise de B si

- le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur des deux droites frontières de la bande.
- La frise F est invariante par la translation de vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire que $t_{\vec{u}}(F) = F$, en tenant compte des couleurs.
- Si F est invariante par une translation de vecteur $\vec{v}$, alors $\vec{v}$ est de la forme $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$, où k est un entier relatif.

Définition 6.33 (Maille d'une frise)

On appelle maille d'une frise F la partie de la frise contenue dans un parallélogramme $ABCD$ de côtés $[AB]$ et $[DC]$ portés par les droites frontières de la bande B et vérifiant $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{u}$.

Remarque 6.34

La frise est l'union des translatés de la maille.

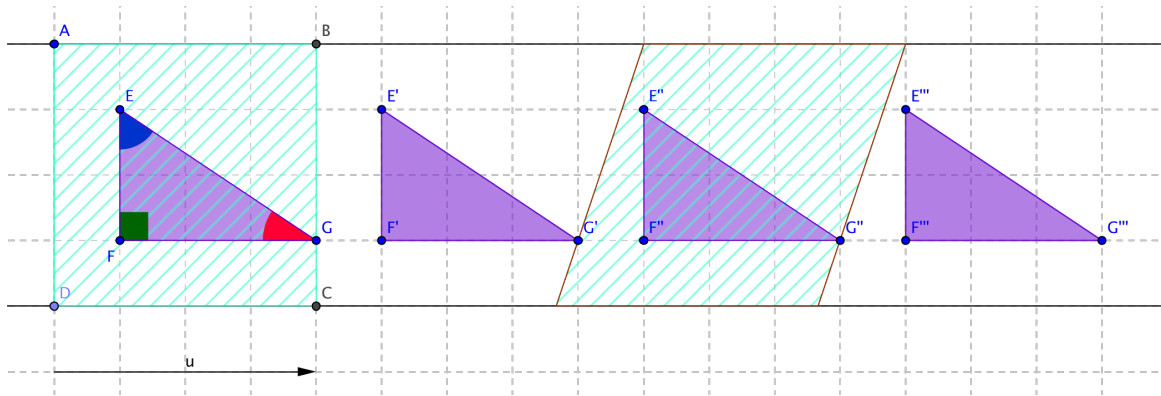


FIGURE 6.2 – Une maille rectangulaire et une maille parallélogramme

Définition 6.35

Un motif d'une frise $F_{\vec{u}}$ est une partie minimale de la maille qui permet de construire la frise en faisant agir les isométries conservant F .

Définition 6.36 (Motif de translation)

Un motif de translation M est une partie connexe fermée de F , c'est-à-dire d'un seul morceau, telle que les translatés de M par les translations de $T(F)$ recouvrent F :

$$\cup_{t \in T(F)} M = F$$

et telle que l'intersection des deux translatés soit contenue dans leur frontière.

Définition 6.37 (Motif de base)

Un motif de base M est une partie connexe fermée de F , telle que les images de M par les isométries $Is(F)$ recouvrent F :

$$\cup_{t \in Is(F)} M = F$$

et telle que l'intersection des deux transformés soit contenue dans leur frontière.

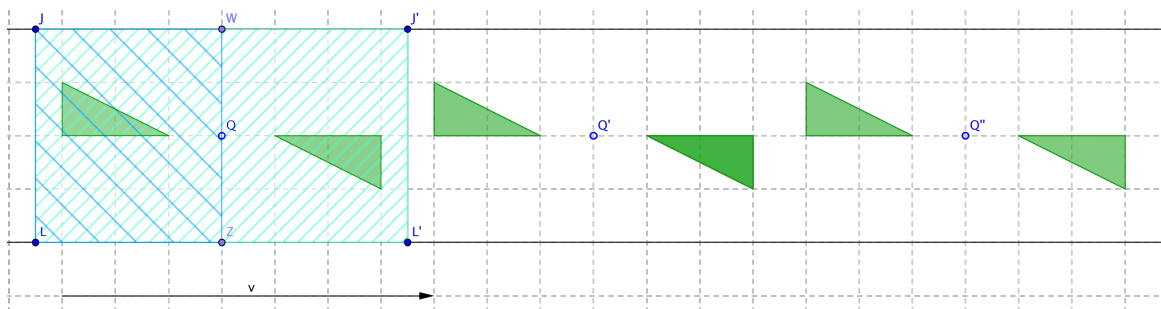


FIGURE 6.3 – La maille est hachurée une fois et le motif deux fois

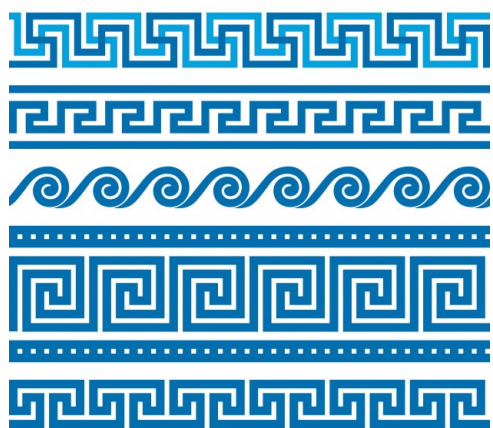


FIGURE 6.4 – Quelques frises

Exercice 6.38

Déterminer le ou les motifs et les isométries employés pour obtenir les figures ci-dessous.

6.9.2 Pavage

Les figures suivantes 6.5 sont des pavages du plan. Ils ne sont pas réguliers. Il existe des surfaces petites ou grandes non pavés. Néanmoins, c'est une des applications des transformations isométriques.

6.9.3 G.I.S.

Une des applications des matrices est dans les modèles de données dans le G.I.S.

Le "Data model" est un modèle mathématique construit pour représenter les objets géographiques et les surfaces en données. Par exemple, le vecteur représente une collection de points, de lignes, ou de polygones. Dans un autre modèle "Raster model", on représente les données dans les cellules de matrices.

Les données des géoïdes et autres géographiques sont elles aussi représentées dans des matrices³.

6.9.4 G.P.S.

Les coordonnées G.P.S. sont obtenues à partir des données envoyées par les différents satellites orbitant au tour de la terre. Les données reçues à partir d'un satellite i est le vecteur G_i suivant : $G_i = (x_i, y_i, z_i, s_i)$, où x_i , y_i et z_i sont les positions du satellite et s_i le temps de son horloge interne.

Pour obtenir sa position G.P.S., le receveur a besoin de résoudre un système d'équations en fonction des données obtenues de chaque satellite. Ce système s'écrit sous forme de matrice dont on doit calculer son inverse⁴.

³au moins de façon simple à concevoir. Sinon, en réalité ce sont des matrices creuses compressées. On utilise souvent des interpolations pour les points intérieurs, ce qui explique les erreurs parfois obtenues.

La compréhension des autres erreurs commises par les géographes et architectes durant leurs études est en dehors du cadre de ce cours.

⁴C'est une façon simple de présenter la résolution à faire, minimiser l'erreur commise et éviter la surdétermination du résultat.

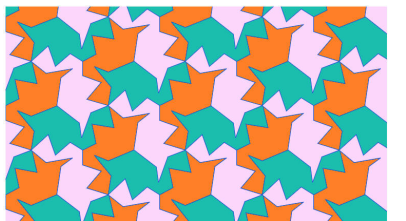
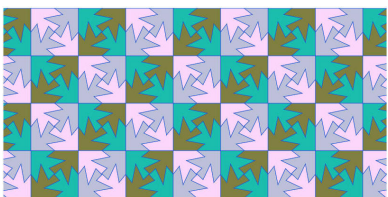
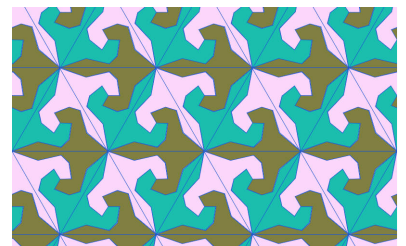
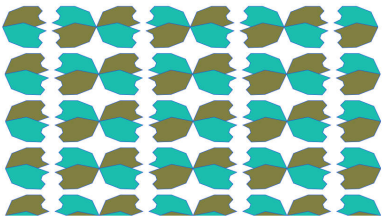
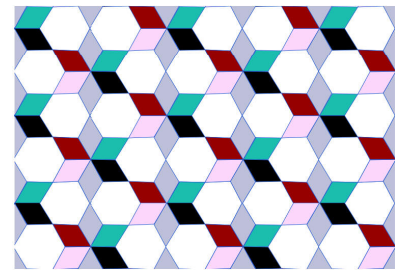


FIGURE 6.5 – Quelques pavages (1)

Bibliographie

- [1] S. K. Abdali. The correct qibla. *Dublin : National Science Foundation*, 1997.
- [2] A. Alaoui. *Géométrie euclidienne élémentaire*. Ellipses, Paris, 2012. ISBN 978-2-7298-71949.
- [3] G. D. Birkhoff and R. Beatley. *Basic geometry*. 3rd ed. Chelsea Publishing Company, New York, 1959. 294 pp.
- [4] A. Brahic. *Enfants du soleil : histoire de nos origines*. O. Jacob, Paris, 2000. ISBN 9782738108616.
- [5] L. Chambadal. *Calcul pratique arithmétique et géométrie*. Hachette Education, Paris, 1994. ISBN 978-2010087806.
- [6] G. Choquet. *Enseignement de la Géométrie*. Hermann Paris, 1964. ISBN 978-2705652388. 178 pp.
- [7] L. Claessens. *LE FRIDO Vol. 3. Les Grands Classiques Gauthier-Villars*. [Gauthier-Villars Great Classics]. The Book Edition, 2019. ISBN 9791097085209. 581 pp.
- [8] Ebook. *Opera Magistris : Eléments de Mathématiques Appliquées (Sciences.ch)*. Sciences.ch, 2018. ISBN 978-2-8399-0932-7.
- [9] R. Ferréol. MS Windows NT kernel description, 2020. <https://wims.univ-cotedazur.fr>.
- [10] R. Ferréol. Université côte d’azur, 2020. <https://wims.univ-cotedazur.fr/>.
- [11] L. Ghambadal. *Calcul pratique : arithmétique et géométrie*. Hachette, Paris, 1994. ISBN 9782010087806.
- [12] K. Haga. *Origamics : mathematical explorations through paper folding*. World Scientific, Singapore Hackensack, NJ, 2008. ISBN 9812834907.

- [13] D. Hilbert. Les principes fondamentaux de la géométrie. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 17 :103–209, 1900.
- [14] T. Hill. *First Lessons in Geometry*. Wentworth Press, 1959. ISBN 978-0469089488. 146 pp.
- [15] W. Kainz. The mathematics of GIS. *University of Vienna, Austria*, 2010.
- [16] A. M. Legendre. *Eléments De Géométrie : Avec Des Notes*. Wentworth Press, 2018. ISBN 978-0270329988. 478 pp.
- [17] D. Müller. Géométrie, 2009. <http://apprendre-en-ligne.net/index.php>.
- [18] J. Molk, editor. *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome III. Vol. 1. Les Grands Classiques Gauthier-Villars*. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1991. ISBN 2-87647-110-8. 240 pp. Fondements de la géométrie. [Foundations of geometry], Reprint of the French editions of 1911 and 1915.
- [19] D. Perrin. *Mathématiques d'école : nombres, mesures et géométrie*. Cassini, Paris, 2011. ISBN 978-2-84225-158-1.
- [20] B. Rittaud. *La Géométrie classique : objets et transformations*. Le Pommier-Fayard, Paris, 2000. ISBN 2-7465-0037-X.
- [21] E. Royer. *Cours de licence première année, premier semestre : algèbre linéaire*. Université Clermont-Auvergne, Clermont-Ferrand, France, 2013.
- [22] T. Wade. *A to Z GIS : an illustrated dictionary of geographic information systems*. ESRI Press Independent Publishers Group distributor, Redlands, Calif, 2006. ISBN 9781589481404.

Examen 2018-2019

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA
FACULTE DES SCIENCES DE LA TERRE
DEPARTEMENT D'ARCHITECTURE



جامعة باجي مختار – عنابة
كلية علوم الأرض
قسم الهندسة المعمارية

Licence 1^{ère} année

Durée 1H30

année 2018 – 2019

Examen de Mathématiques

Il n'est autorisé que l'usage de stylos (bleu, noir ou crayons).

Le correcteur et l'effaceur sont interdits et leurs utilisations sera sanctionné

Les calculettes et calculatrices sont interdites

Exercice 1 :

Proposition 1 : Toute rotation est le produit de deux réflexions. La droite de l'une peut être choisie arbitrairement ...

Soit $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

- 1) Montrer que B et C sont des isométries.
- 2) Calculer $A = B \cdot C$

Aide : $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$ pour tout α de $\mathbb{R}$

- 3) En déduire que A est une isométrie.
(Bonus) A est-elle une réflexion, une symétrie, une translation, une homothétie, une rotation ou une projection ?

Proposition 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si le déterminant de A est nul alors A ne peut pas être une matrice de rotation.

- 1) Dite pourquoi la proposition 2 est juste.

Exercice 2 :

Proposition : En architecture, le postulat du parallélisme nous est d'une grande utilité.

- 1) Citer le postulat n°5 d'Euclide.
- 2) Pourquoi on s'intéresse au postulat n°5 d'Euclide ?
ou
En quoi diffère la géométrie euclidienne de la géométrie non euclidienne ?
- 3) Quelle est la différence entre les postulats d'Euclide et les axiomes de Hilbert ?

Exercice 3 :

Théorème : Dans un cercle, un angle au centre $(OA; OB)$ mesure le double de tout angle inscrit $(MA; MB)$ qui intercepte le même arc.

- 1) Montrer ce théorème
(bonus) Donner une conséquence intéressante pour le triangle rectangle

Examen 2019-2020



+1/1/60+

Université d'Annaba, Département d'architecture Examen de Mathématiques 2019-2020 Durée : 1H30

Cocher les bonnes réponses.

Seuls les stylos noir et bleu sont autorisés.

Le symbole ♣ veut dire zéro, une ou plusieurs bonnes réponses.

Les autres ont une unique bonne réponse.

mauvaise réponse = -0.5 pt.

Question 1 ♣ Parmi les coordonnées GPS suivantes, Lesquelles sont fausses ?

- ☐ 15.3 S 16.4 W ☐ 4000 km N, 3620 km E ☐ 91.3 S 89.2 E
☐ 89.2 S 91.3 E ☐ 15.3 N 16.4 E

Question 2 ♣ L'altitude donnée par les ellipsoïdes est

- ☐ Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte
☐ plus précise que l'altitude du géoïde
☐ ne diffère que d'une centaine de mètre de l'altitude réelle
☐ différente de l'altitude réelle

Question 3 ♣ Que représente les coordonnées suivantes (35.123 , 41.2 , 37.1258)

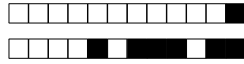
- ☐ des coordonnées ellipsoïdales
☐ des coordonnées polaires
☐ des coordonnées GPS
☐ des coordonnées sphériques
☐ Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte
☐ des coordonnées cartésiennes

Code d'anonymat pour l'administration

Code d'anonymat pour l'administration

Prénom et NOM

Groupe



Question 4 ♣ L'image d'une droite par une transformation non isométrique peut être

- ☐ un cercle ☐ une droite
☐ Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte ☐ un point

Question 5 ♣ Les transformation isométrique

- ☐ préservent les angles et les longueurs
☐ transforme le carré en cercle
☐ préservent les angles et agrandissent les distances
☐ préservent les distances et changent les angles orientés

Question 6 ♣ La composée de deux transformations isométriques peut être

- ☐ une projection ☐ une translation ☐ une réflexion
☐ Aucune des autres réponses n'est correcte ☐ une rotation
☐ une identité ☐ impossible

Question 7 ♣ Un polygone régulier n'est pas

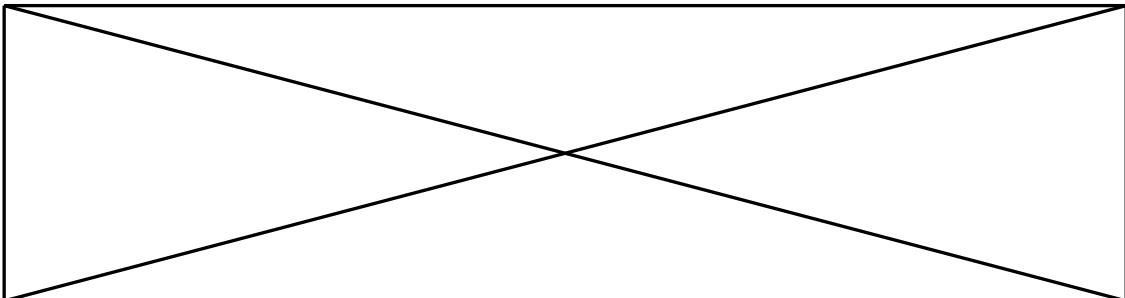
- ☐ un polygone concave ☐ un polygone croisé ☐ un triangle
☐ un polygone convexe ☐ un polygone étoilé

Question 8 Le nombre de diagonale dans un polygone de n coté est

- ☐ indépendant de n ☐ n-2 ☐ $(n-2)(n-1)$ ☐ n-1

Question 9 En géométrie non euclidienne, la somme des angles d'un triangle est

- ☐ différente de 180° ☐ égale à 180° ☐ plus petite que 180°
☐ plus grande que 180°





Question 10 Les axiomes de Hilbert sont

- ☐ les bases de la construction axiomatique de la géométrie
- ☐ des cas particuliers des postulats d'Euclide
- ☐ Les base de la matrice euclidienne
- ☐ une généralisation des postulats d'Euclide
- ☐ les bases de la construction des polygones de Platons

Question 11 ♣ Les axiomes sont

- ☐ des proposition fausses comme ceux de Hilbert
- ☐ aucune des autres réponses n'est correcte
- ☐ des théorèmes de base
- ☐ des proposition vraies ou supposées vraies
- ☐ des propositions démontrables

Question 12 Deux angles sont dit supplémentaires si

- ☐ leur somme est égale à 90°
- ☐ leur somme est égale à 180°
- ☐ ils sont des angles orientés
- ☐ Aucune des autres réponse n'est correcte

Question 13 Deux angles sont dit complémentaires si

- ☐ Aucune des autres réponse n'est correcte
- ☐ leur somme est égale à 180°
- ☐ leur somme est égale à 90°
- ☐ ils sont des angles orientés

Question 14 Dans la géométrie non euclidienne, le plan est

- ☐ une figure de l'espace
- ☐ la géodésique
- ☐ l'espace lui même
- ☐ une droite

Code d'anonymat pour l'administration



Code d'anonymat pour l'administration



Prénom et NOM

Groupe

