

Module : Modélisation (MMC)
Master 1 de Mathématique Appliquée

Avril 2020

Devoir No 2
 (Réponses)

Exercice 1.

On considère la transformation homogène (cisaillement) définie, à l'instant t , par :

$$x_1 = X_1 + \alpha t X_2, \quad x_2 = X_2 + \alpha t X_1, \quad x_3 = X_3, \quad \alpha > 0$$

- 1- $F(t)$ gradient de la transformation.

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2- Tenseur des dilatations $C(t)$

$$C(t) = F^T F = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 t^2 & 2\alpha t & 0 \\ 2\alpha t & 1 + \alpha^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + 2L$$

avec

$$L(t) = \begin{pmatrix} \alpha^2 t^2 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & \alpha^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Directions principales . l'Equation caractéristique

$$\det(C - \lambda I) = (1 - \lambda)[(C_{11} - \lambda)^2 - C_{12}^2] = 0$$

possède 3 racines $\lambda_1 = (1 - \alpha t)^2$, $\lambda_2 = (1 + \alpha t)^2$, $\lambda_3 = 1$.

Les directions principales (vecteurs propres $C U_j = \lambda_j U_j$)

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad U_3 = (0, 0, 1)$$

On a $F U_j = \mu_j U_j$, donc les dilatations principales sont $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ ie

$$\mu_1 = 1 - \alpha t, \quad \mu_2 = 1 + \alpha t, \quad \mu_3 = 1$$

- 3- Tenseur des petites déformations $\varepsilon(t)$, sachant que αt est petit.

$$L(t) \simeq \varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. (Déformation de la gomme)

Soit $l > 0$ et $\Omega_0 = [0, l]^3$, la gomme avant déformation.

Considérons la transformation (non homogène) $\phi : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ définie par

$$x = \phi(X) \Leftrightarrow x_1 = 2X_1; \quad x_2 = X_2; \quad x_3 = X_3 + X_1^2$$

Soit trois points de Ω_0 : $A = (\frac{l}{2}, 0, \frac{l}{2})$; $B = (\frac{l}{2} + \delta l, 0, \frac{l}{2})$; $C = (\frac{l}{2}, 0, \frac{l}{2} + \delta l)$
et A' , B' , C' leurs image dans Ω .

- 1- Calculer $C(A)$ tenseur de Cauchy au point A .

Rep : on a

$$F(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$C(A) = F(A)^T F(A) = \begin{pmatrix} 4 + l^2 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2- Si δl est petit par rapport l , calculer approximativement la longueur de $A'B'$.

Rep. On a $\overrightarrow{AB} = (\delta l, 0, 0)$, donc

$$\overrightarrow{A'B'} = F(A)(\delta l, 0, 0) = (2\delta l, 0, l\delta l) \Rightarrow A'B' = \delta l |\sqrt{4 + l^2}|$$

- 3- Calculer $\sin \gamma$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\alpha = \angle(A'B', A'C')$

Rép. $\sin \gamma = \frac{l}{\sqrt{4 + l^2}}$

- 4- Calculer le volume de Ω (la gomme après déformation).

Rép. $Vol(\Omega) = J(A)Vol(\Omega_0) = 2l^3$

Exercice 3.

Considérons le champ de vitesse (eulerien)

$$V_1 = V_2 = 0, \quad V_3(x, t) = 1 - \beta x_1^2; \quad \beta > 0$$

- 1- Calculer $D(x, t)$ le tenseur du taux de déformation

Rép.

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \text{ et } \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

d'où

$$D(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta x_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta x_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2- Calculer le vecteur tourbillon $\omega(x, t)$

Rép.

$$\omega(x, t) = \frac{1}{2} Rot(V) = (-\Omega_{23}, \Omega_{13}, -\Omega_{12}) = (0, \beta x_1, 0)$$

- 3- Calculer la trajectoire issue de $X = (X_1, X_2, X_3)$,
écrire l'équation du mouvement $x = \phi(X, t)$

Rép. On résout le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = V(x, t), \quad x(0) = X$$

donc

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = X_1 \text{ et } x_2 = X_2$$

et

$$\dot{x}_3 = 1 - \beta x_1^2 = 1 - \beta X_1^2 \Rightarrow x_3 = X_3 + (1 - \beta X_1^2)t$$

La déformation s'écrit alors

$$x = \phi(X, t) = X + (1 - \beta X_1^2)te_3$$

Les trajectoires sont des droites parallèles à la direction e_3 .

- 4- Donner l'expression de $V^L(X, t)$ vitesse de Lagrange.

Rép. $V^{(L)}(X, t) = V(\phi(X, t), t) = (0, 0, 1 - \beta X_1^2)$

Une réponse directe :

$$\begin{aligned} V^{(L)}(X, t) &= \frac{\partial \phi(X, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(X_1, X_2, (1 - \beta X_1^2)t) \\ &= (0, 0, (1 - \beta X_1^2)) \end{aligned}$$

Remarque : inversement, on a

$$V^{(E)}(x, t) = V(\psi(x, t), t)$$

où $\psi = \phi^{-1}$ la transformation inverse ($\phi_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ est un difféomorphisme)