

Master de Maths-Appliquées
Modélisation: Introduction à la Mécanique des Milieux
Continus (MMC)

Lahcène CHORFI
Dept. de Maths, Université B.M. d' Annaba

Avril 2020

Table des matières

1	Cinématique	2
1.1	Le milieu continu, modélisation	2
1.2	Déformation d'un milieu continu	3
1.2.1	Le mouvement et sa représentation	3
1.2.2	Tenseur des déformations	5
1.2.3	Tenseur des dilatations (de Cauchy)	6
1.2.4	Tenseur de déformation de Green-Lagrange	9
1.3	Cinématique	10
1.3.1	Dérivée particulaire d'un champ $b(x,t)$	11
1.3.2	Gradient de vitesse	12
1.3.3	Théorème de transport	15
2	Efforts dans un milieu continu	18
2.1	Loi de conservation	18
2.1.1	Conservation de la masse. Equation de continuité . . .	18
2.1.2	Loi de conservation de la quantité de mouvement . . .	19
2.2	Loi de conservation de l'énergie: premier principe de la thermo- dynamique	21
3	Applications	24
3.1	Elasticité linéaire	24
3.1.1	Essais mécaniques	24
3.1.2	Loi de Hooke généralisée	27
3.1.3	Système d'élasticité de Lamé	28
3.2	Mécanique des fluides	30
3.2.1	Introduction	30
3.2.2	Fluide parfait	30
3.2.3	Fluide newtonien	31

Chapitre 1

Cinématique

1.1 Le milieu continu, modélisation

Définition 1 *Un milieu est continu (MC) dans une région de l'espace s'il occupe entièrement cette région sans discontinuité spaciale ou temporelle pour ses propriétés.*

A l'échelle macroscopique, il modélise les milieux matériels (solide, liquide, gaz). Par contre il ne traduit pas la structure réelle de la matière constituée à l'échelle microscopique par un grand nombre de particules distinctes (atomes, molécules). Par exemple $1\mu m^3$ d'air contient 2.7×10^7 molécules, le parcours moyen d'une molécule est de $10^{-4} mm$ (agitation moléculaire).

Ici on adopte l'approche macroscopique. On ne prend pas en compte le caractère microscopique discontinu de la matière, c.a.d on ne prend pas en compte le mouvement des molécules.

Un élément de volume est constitué d'un très grand nombre de molécules.

Dans un MC, les propriétés physiques varient d'une façon continue d'un point à un autre.

Un système mécanique est représenté par un volume $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ constitué de particules.

Une particule est un point matériel caractérisé par sa position $x = \overrightarrow{OM}$.

La continuité signifie veut dire que lors de l'évolution du système les particules initialement voisines demeurent voisines.

Applications de la MMC. Ce paragraphe est tiré d'un cours destiné aux ingénieurs [5].

La mécanique des milieux continus (en abrégée M.M.C), est une branche de la mécanique qui se propose d'étudier les mouvements, les déformations et les champs de contraintes au sein de milieux continus. C'est un vaste domaine qui a pour but l'étude des lois de mouvement des corps déformables (solides, liquides, gaz). Elle est caractérisée par l'interaction des lois de déformation avec celles de la thermodynamique. L'étude concerne des corps qui remplissent l'espace d'une façon continue, ininterrompue. La distance entre deux points de ces corps ne change pas au cours du mouvement. Les problèmes essentiels de la mécanique des milieux continus sont :

- 1. L'étude des mouvements des solides déformables.
- 2. L'étude des mouvements des corps flottants et immergés.
- 3. L'étude des mouvements non stationnaires des gaz.

1.2 Déformation d'un milieu continu

1.2.1 Le mouvement et sa représentation

Référentiel: c'est un repère (orthonormé) fixe $\mathcal{R} = \{0; e_1, e_2, e_3\}$

Vecteur position: $x = \overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 := x_i e_i$

Ω_0 configuration de référence (initiale, à $t = t_0$)

$\Omega = \Omega_t$ configuration actuelle (après déformation ou à l'instant t)

$M_0 \in \Omega_0$ repéré par $X = \overrightarrow{OM_0} = (X_1, X_2, X_3)$

$M \in \Omega$ repéré par $x = \overrightarrow{OM} = (x_1, x_2, x_3)$

$$x(t) = \phi(X, t) \Leftrightarrow x_i = \phi_i(X, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

ϕ définit le mouvement par rapport au repère $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$. Pour assurer la continuité du milieu, on suppose que $\phi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ est continue et bijective. Plus précisément, on suppose que $\phi(t)$ est un C^1 difféomorphisme, on note $\psi = \phi^{-1}$.

$u(X, t) = \phi(X, t) - X$ le vecteur déplacement.

Description Lagrangienne

Elle consiste à identifier les particules par leurs positions dans une configuration initiale et à les suivre dans leur mouvement

- X et t : variables de Lagrange

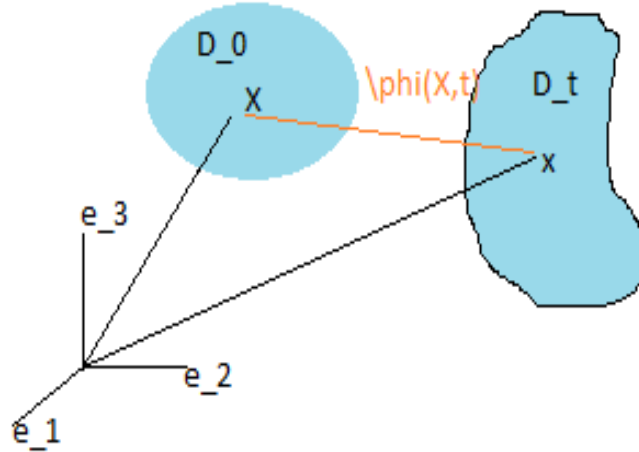


FIG. 1.1 – *Configuration de référence et actuelle*

- Position: $x = \phi(X,t)$
- Vitesse: $V = \frac{\partial \phi}{\partial t}(X,t)$
- Accélération $\gamma = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(X,t)$
- Grandeur $g = G(X,t)$

Description Eulerienne

Elle consiste à observer les propriétés des particules qui passent successivement en un point donné x . Le mouvement est défini par la donnée de la vitesse $V = V(x,t)$ à chaque instant t avec la configuration actuelle comme référence.

- x et t : variables d'Euler
- Position: x fixé
- Vitesse: $V(x,t)$
- Grandeur $g = G(x,t)$

La description eulerienne s'obtient à partir de la description lagrangienne

$$\begin{cases} V^{(L)}(X,t) = V^E(\phi(X,t),t) & \Leftrightarrow V^{(E)}(x,t) = V^L(\psi(x,t),t) \\ G(X,t) = g(\phi(X,t),t) & \Leftrightarrow g(x,t) = G(\psi(x,t),t) \end{cases}$$

Inversement la description eulerienne permet de retrouver la description lagrangienne en résolvant le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V(x,t) \\ x(0) = X \end{cases}$$

La solution $x = \phi(X,t)$ est la trajectoire de la particule.

Exemple.

Soit le mouvement décrit par les equations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_1}{1+tX_1} \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Calculer les composantes du vecteur de vitesse en termes des variables lagrangiennes puis euleriennes.

- 1. Variables de Lagrange.

$$\begin{cases} V_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{-X_1^2}{(1+tX_1)^2} \\ V_2 = 0 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

- 2. Variables d'Euler.

$$v(x,t) = V(X,t) = \{v_1 = -x_1^2, v_2 = 0, v_3 = 0\}$$

1.2.2 Tenseur des déformations

Définition 2 *Le tenseur gradient décrit la transformation locale au voisinage d'une particule donnée. Afin de rendre compte des déformations, c'est à dire des changements de forme autour de cette particule, on s'intéresse à l'évolution du produit scalaire de deux vecteurs matériels pris respectivement dans les deux configurations Ω_0 et $\Omega(t)$.*

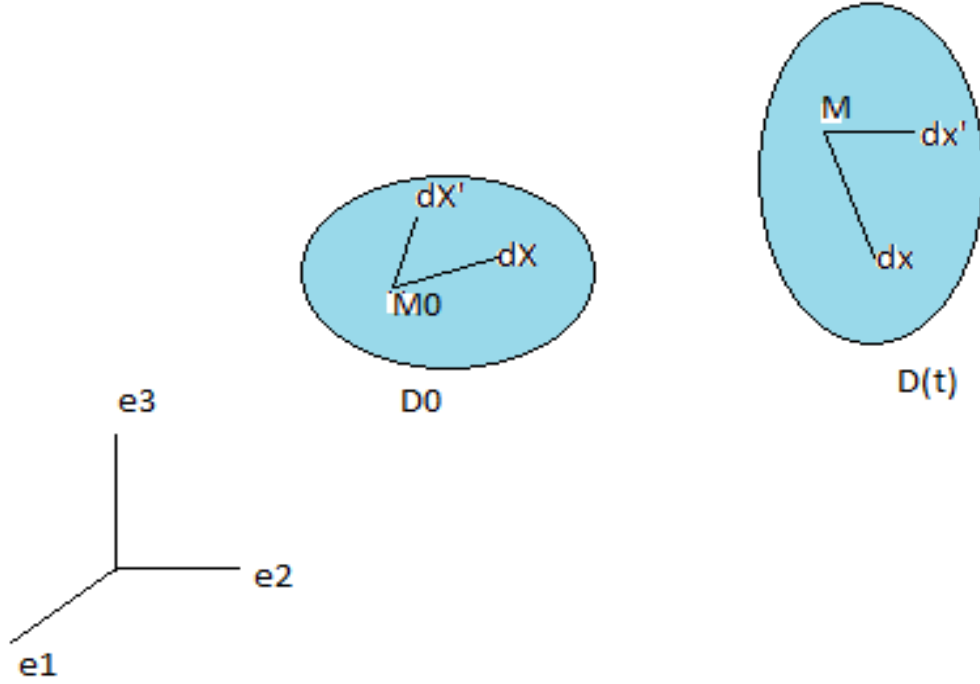


FIG. 1.2 – *Notion de déformation*

Considérons trois particules voisines X , $X + dX$, $X + dX'$. Après déformations, elles occupent dans $\Omega(t)$ les positions respectives x , $x + dx$, $x + dx'$. En différenciant $x = \phi(X, t)$, on obtient :

$$dx(t) = F(X, t)dX \Leftrightarrow dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j} dX_j$$

$F(X, t) = (\frac{\partial \phi_i}{\partial X_j})$ est la matrice Jacobienne de $\phi(X, t)$ ou le gradient de la déformation $F = \nabla_X \phi$. $F(X, t)$ est nommé aussi tenseur de déformation.

1.2.3 Tenseur des dilatations (de Cauchy)

Notations matricielle.

- Un vecteur $V = V_i e_i$ s'écrit $V = \text{col}(V_1, V_2, V_3)$, $V^T = (V_1, V_2, V_3)$

- Produit scalaire de deux vecteurs: $U \cdot V = \sum_{i=1}^3 U_i V_i$
- Une Matrice $A = (a_{i,j})$, $A^T = (a_{i,j}^*)$ avec $a_{i,j}^* = a_{j,i}$

Dans ce paragraphe on suppose que $F = F(X)$ ne dépend pas de t .

$$dx \cdot dx' = F(X)dX \cdot F(X)dX' = C(X)dX \cdot dX' = C(X; dX, dX')$$

avec $C(X) = F(X)^T F(X)$ tenseur de dilatation.

$C(X)$ es une matice symétrique définie positive, la forme quadratique $C(X, U, V)$ défini un produit scalaire qui indique comment sont déformés les longueurs et les angles. On a

$$\frac{\|dx\|}{\|dX\|} = \frac{C(X; dX, dX)^{1/2}}{\|dX\|}$$

$$\frac{\|dx\|}{\|dX\|} = \Lambda(X, dX) \text{ dilatation relative des longueurs.}$$

- Glissement des vecteurs orthogonaux (variation des angles).
- Angle de glissement $\gamma(X, dX, dX')$

$$dx \cdot dx' = \|dx\| \|dx'\| \sin \gamma \implies \sin \gamma = \frac{C(X; dX, dX')}{C(X; dX, dX)^{1/2} C(X; dX', dX')^{1/2}}$$

Si $dX = \lambda e_i$ et $dX = \mu e_j$ sont orthogonaux, alors

- $\Lambda(X, dX) = \sqrt{C_{ii}}$
- $\sin \gamma_{i,j} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}} \sqrt{C_{jj}}}$, où $C(X) = (C_{ij}(X))$

Donc les éléments diagonaux de $C(X)$ déterminent les dilatations relatives dans les directions e_i .

- Les éléments non diagonaux nous donnent les angles de glissement dans le plan $[e_i, e_j]$

Changement de volume

Soit un parallépipède élémentaire défini par les vecteurs (dX, dX', dX'') attachés en $X \in \Omega_0$. Son image par la transformation ϕ est un parallépipède

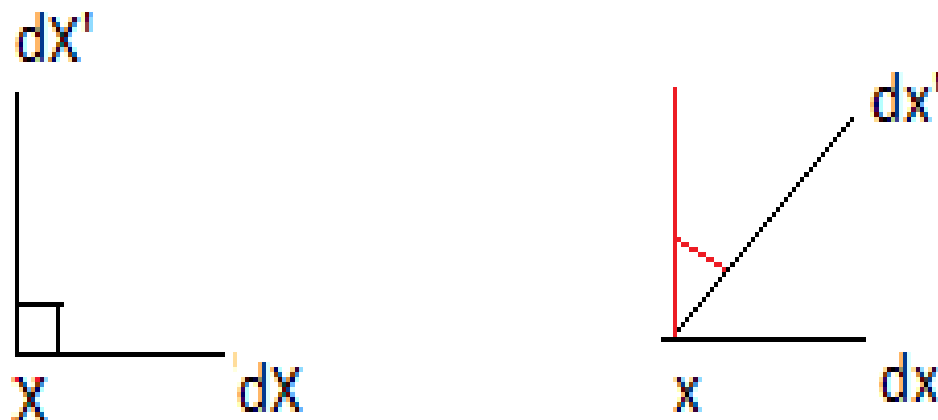


FIG. 1.3 – *Angle de cisaillement*

de cotés (dx, dx', dx'') . On note δV_0 , δV les volumes respectifs

$$\delta V_0 = \det(dX, dX', dX'') = dX \cdot (dX' \wedge dX''), \quad (\text{produit mixte})$$

$$\delta V = \det(dx, dx', dx'') = \det(F(X)dX, F(X)dX', F(X)dX'')$$

$$= \det F(X) \det(dX, dX', dX'')$$

$$= J(X) \delta V_0 \quad (J = \text{Jacobien de } \phi)$$

Dilatation volumique relative: $\frac{\delta V_0}{\delta V} = J(X)$

Intégrale de volume

Conservation de masse: Soit $D_0 \subset \Omega_0$ un domaine arbitraire. La masse M de D_0 ne change pas après déformation (principe de conservation de masse). Notons par $\rho^P(X)$ la densité du milieu de référence (dite particulaire) et

$\rho^E(x)$ la densité en un point x de Ω (variable Euler) . Alors

$$\begin{aligned}\int_{D_0} \rho^P(X) dX &= \int_D \rho^E(x) dx & (m(D_0) = m(D)) \\ &= \int_{D_0} \rho^E(\phi(X)) J(X) dX & (\text{théorème de Changement de variable})\end{aligned}$$

Comme D_0 est arbitraire, ce qui montre que $\rho^E(x) = \frac{\rho^P(X)}{J(X)}$.

1.2.4 Tenseur de déformation de Green-Lagrange

On a

$$\|dx\|^2 - \|dX\|^2 = 2L(X)dX \cdot dX$$

avec $L(X) = \frac{1}{2}(C(X) - I)$ appelé tenseur de Green-Lagrange.

$L(X)$ mesure la déformation du milieu.

Rappelons que $\Lambda(X, dX) = \frac{\|dx\|}{\|dX\|}$ désigne la dilatation relative

Si $\Lambda(X, dX) = 1 + \Delta(X, dX)$, $\Delta(X, dX)$ appelé allongement relatif, d'où

$$\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2 = \frac{dX^T L(X) dX}{\|dX\|^2}$$

Si $|\Delta| \ll 1$ on néglige Δ^2 devant $|\Delta|$, d'où

$$\Delta(X, dX) \simeq \frac{dX^T L(X) dX}{\|dX\|^2}$$

Le tenseur $L(X)$ noté $\varepsilon(X)$ et nommé " tenseur des petites déformations".

Ce tenseur sera étudié dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Diaonalisation du tenseur de dilataion $C = F^T F$

$C(X)$ est symétrique défini positif, donc il admet une base propre $\{u_1, u_2, u_3\}$, les valeurs propres sont strictement positifs

$$Cu_j = \lambda_j^2 u_j \quad j = 1, 2, 3$$

- u_j directions principales,
- λ_j coefficient de dilatation suivant les directions u_j . C'est à dire que: si dX est colinéaire à u_j alors $\Lambda(X, dX) = \lambda_j$
- L'angle de cisaillement $\gamma_{ij} = 0$ si $dX = \|dX\|e_i$ et $dX' = \|dX'\|e_j$, $i \neq j$.

Transport de volume

Supposons que W_0 est un cube dont les côtés sont dirigés par les vecteurs de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$. Alors

$$vol(W) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 dX^3 = J(X) vol(W_0)$$

Si W_0 est une petite sphère centrée en M_0 , alors W est une ellipsoïde centrée en $M = \phi(M_0)$ d'axes u_j et de demi-axes $\lambda_j dX$, $j = 1, 2, 3$. On a supposé que la transformation est directe, i.e $J(X) > 0$.

Décomposition locale de la déformation F

On a la décomposition

$$F(X) = V(X)R(X)$$

où

- $R(X)$ est une rotation (isométrie qui conserve les angles, matrice orthogonale ou unitaire)
- $V(X)$ dilatation des longueurs (matrice symétrique, on suppose que les valeurs propres sont positives)

1.3 Cinématique

Dans cette section on étudie le mouvement d'un MC considéré comme une suite continue de déformations entre une configuration de référence Ω_0 et des configurations déformées $\Omega(t)$.

Notations.

- $x = \phi(X, t)$: équation du mouvement (trajectoire d'une particule $M(t)$, $M_0 = \phi(X, 0)$ position initiale)
- $F(X, t) = \nabla \phi$
- $J(X, t) = \det(F(X, t))$ Jacobien de ϕ par rapport à X .
- $C(X, t) = F^T F$ Tenseur de Cauchy
- Représentation Eulerienne et Lagrangienne d'un champ B : $B(X, t) = b(x, t)$

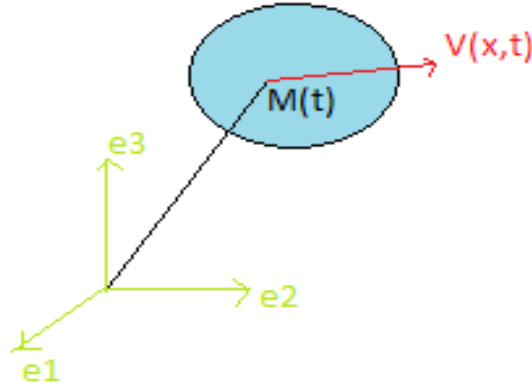


FIG. 1.4 – *Description Eulerienne du mouvement*

Loi de conservation de masse

La masse volumique du milieu est définie par :

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

Avec :

- ρ : masse volumique
- dv : volume élémentaire
- dm : masse élémentaire de la particule
- $\rho(x,t)$: masse volumique du volume de la configuration Ω_t
- $\rho_0(X)$: masse volumique du volume de la configuration Ω_0 (densité particulaire)

De la loi de conservation de masse on déduit la relation

$$\rho_0(X) = \rho(x,t)J(X,t)$$

1.3.1 Dérivée particulaire d'un champ $b(x,t)$

De la relation $B(X,t) = b(\phi(X,t),t)$ on a

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \text{grad } b \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \text{grad } b := \left(\frac{\partial b}{\partial x_1}, \frac{\partial b}{\partial x_2}, \frac{\partial b}{\partial x_3} \right)^T$$

$\frac{db}{dt}$ s'appelle dérivé particulière, qu'on peut écrire

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + V \text{grad } b$$

$V \text{grad } b$ est la dérivée suivant le vecteur vitesse $V(x,t)$.

Si $B(x,t) = (B_1, B_2, B_3)$ est un champ de vecteurs alors

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + V^T \text{grad } B$$

avec

$$\text{grad } B = (\text{grad } B_1, \text{grad } B_2, \text{grad } B_3),$$

$$V^T \text{grad } B = (V \text{grad } B_1, V \text{grad } B_2, V \text{grad } B_3)^T$$

1.3.2 Gradient de vitesse

$$V(x,t) = (V_1(x,t), V_2(x,t), V_3(x,t))$$

, avec

$$V_i(x,t) = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(X,t)$$

champs des vitesses en fonction de la variable d'Euler x .

Gradient de vitesse $K(x,t) = (K_{ij}(x,t)); K_{ij}(x,t) = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$

Vecteur transporté par le mouvement

$$- \delta x = F(X,t) \delta X$$

$$- \frac{d}{dt}(\delta x(t)) = \frac{d}{dt}(F(X,t) \delta X) = \frac{d}{dt}(\nabla \phi(X,t) \delta X) = \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \delta X = \nabla V(X,t) \delta X$$

mais la règle de dérivation d'une fonction composée $V^L(X,t) = V(\phi(X,t), t)$ entraîne

$$\nabla V(X,t) = \text{grad } V(x,t) \nabla \phi(X,t) = K(x,t) F(X,t)$$

donc

$$\frac{d}{dt}(\delta x(t)) = K(x,t) \delta x$$

Décomposition du tenseur gradient de vitesse

On décompose la matrice K en deux parties, symétrique et anti-symétrique:

$$K(x,t) = D(x,t) + \Omega(x,t)$$

où

$$D = \frac{1}{2}(K + K^T); \quad \Omega = \frac{1}{2}(K - K^T)$$

$$\begin{aligned} - D &= (D_{ij}), \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \text{ (tenseur de taux de déformation)} \\ - \Omega &= (\Omega_{ij}), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \text{ (tenseur de taux de rotation)} \end{aligned}$$

Vecteur rotation (tourillon)

$$\omega(x,t) = \frac{1}{2} \text{rot} V(x,t)$$

avec la définition

$$\text{rot} V = \nabla \times V = \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right) e_1 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) e_2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) e_3$$

On a aussi

$$\Omega(x,t) \delta x = \omega(x,t) \times \delta x$$

si $\delta V = V(x + \delta x) - V(x)$ alors

$$\delta V = D \delta x + \omega \times \delta x$$

Transport du produit scalaire

Les équations

$$\frac{d}{dt}(\delta x(t)) = K(x,t) \delta x, \quad \frac{d}{dt}(\delta x'(t)) = K(x,t) \delta x'$$

entraînent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta x \cdot \delta x') &= \delta x' \cdot \frac{d}{dt}(\delta x) + \delta x \cdot \frac{d}{dt}(\delta x') \\ &= \delta x' \cdot K(x,t)(\delta x) + \delta x \cdot K(x,t)(\delta x') \\ &= \langle (K(x,t) + K^T(x,t)) \delta x, \delta x' \rangle \\ &= 2 \langle D(x,t) \delta x, \delta x' \rangle \end{aligned}$$

En particulier on obtient le taux d'allongement

$$\frac{1}{\|\delta x\|} \frac{d}{dt}(\|\delta x(t)\|) = \frac{\delta x^T D(x,t) \delta x}{\|\delta x\|^2}$$

et le taux de glissement de deux vecteurs orthogonaux

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t))|_{t=t_*} = 2 \frac{\delta x^T D(x,t_*) \delta x}{\|\delta x\| \|\delta x'\|}$$

$\gamma(t)$ est le complémentaire de l'angle $\theta(t) = \text{angle}(\delta x(t), \delta x'(t))$ on suppose que $\theta(t_*) = \text{angle}(\delta x(t_*), \delta x'(t_*)) = \frac{\pi}{2}$ et $\gamma(t)$ est petit pour $t \sim t_*$. On a utilisé la formule

$$\delta x \cdot \delta x' = \|\delta x\| \|\delta x'\| \sin \gamma(t) \quad \text{et l'approximation } \cos \gamma(t) = 1 \text{ si } t \sim t_*$$

Cas particuliers: si $\delta x = \lambda e_i$, $\delta x' = \lambda e_j$, $i \neq j$ alors

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\|\delta x\|} \frac{d}{dt}(\|\delta x(t)\|) &= D_{ii}, \quad \text{taux d'allongement dans la direction } e_i \\ - \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\gamma(t)) &= D_{ij}, \quad \text{taux de glissement dans le plan}[e_i, e_j] \end{aligned}$$

Transport de volume

Soit un volume élémentaire en mouvement
 $\delta \mathcal{V} = \delta x \cdot (\delta x' \times \delta x'')$ avec $\delta \mathcal{V}_0 = \delta X \cdot (\delta X' \times \delta X'')$.

Théorème 1

$$\frac{1}{\delta \mathcal{V}} \frac{d}{dt}(\delta \mathcal{V}) = \text{Div } V(x,t)$$

Preuve. On sait que $\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \mathcal{V}_0} = J(X,t)$, donc

$$\frac{d}{dt}(\delta \mathcal{V}) = \frac{\partial J}{\partial t}(X,t) \delta \mathcal{V}_0$$

Cela revient à montrer que

$$\frac{\partial J}{\partial t}(X,t) = \text{Div } V(x,t) J(X,t)$$

En effet

$$J(X,t) = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \nabla \phi_1 \cdot (\nabla \phi_2 \times \nabla \phi_3)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t}(X,t) &= \nabla V_1 \cdot (\nabla \phi_2 \times \nabla \phi_3) + \nabla \phi_1 \cdot (\nabla V_2 \times \nabla \phi_3) + \nabla \phi_1 \cdot (\nabla \phi_2 \times \nabla V_3) \\ &= \frac{D(V_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} + \frac{D(x_1, V_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} + \frac{D(x_1, x_2, V_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} \\ &= J(X,t) \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + J(X,t) \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + J(X,t) \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \text{Div } V(x,t) J(X,t) \end{aligned}$$

La deuxième égalité découle de la remarque suivante:

si $b(x,t) = (b_1, b_2, b_3)$ est un champ vectoriel alors la relation

$$B(X,t) = b(\phi(X,t), t)$$

implique

$$\nabla B(X,t) = \text{Grad } b(x,t) \circ \nabla \phi(X)$$

Par exemple si $b(x) = (V_1(x), x_2, x_3)$ alors

$$\frac{D(B_1, B_2, B_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \det(\nabla \phi(X)) \det(\text{Grad } b(x,t)) = J(X,t) \frac{\partial V_1}{\partial x_1}$$

1.3.3 Théorème de transport

Soit $c(x,t)$ un champ scalaire et $D(t) = \phi(D_0)$ un domaine variable. Considérons l'intégrale de volume

$$C(D(t), t) = \iiint_{D(t)} c(x,t) dx$$

Exemple: Masse de $D(t)$ de densité $\rho(x,t)$:

$$m(D(t)) = \iiint_{D(t)} \rho(x,t) dx$$

On veut dériver cette intégrale par rapport au temps t . Si le domaine $D = D_0$ ne dépend pas de t , on peut dériver sous le signe somme.

Par le changement de variable $x = \phi(X)$, on se ramène au domaine de référence D_0

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{D(t)} c(x,t) dx \\
&= \frac{d}{dt} \iiint_{D_0} c^L(X,t) J(X,t) dX \\
&= \iiint_{D_0} \frac{\partial}{\partial t} [c^L(X,t) J(X,t)] dX \\
&= \iiint_{D_0} \left[\frac{\partial c^L}{\partial t}(X,t) J(X,t) + c^L(X,t) \frac{\partial J}{\partial t}(X,t) \right] dX \\
&= \iiint_{D_0} \left[\frac{\partial c^L}{\partial t}(X,t) + c^L(X,t) \text{Div } V \right] J(X,t) dX \\
&= \iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) + V(x,t) \text{Grad } c(x,t) + c(x,t) \text{Div } V(x,t) \right] dx \\
&= \iiint_{D(t)} \left[\frac{dc}{dt}(x,t) + c(x,t) \text{Div } (V(x,t)) \right] dx
\end{aligned}$$

Une deuxième formule: comme

$$\text{Div } (cV) = V \text{Grad } c + c \text{Div } V$$

alors

$$\frac{dC}{dt} = \iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) + \text{Div } (c(x,t)V(x,t)) \right] dx$$

Une troisième formule: on utilise la formule de Gauss, si $F(x) = (F_1, F_2, F_3)$ est un champ vectoriel (de classe C^1) alors

$$\iiint_D \text{Div } F dx = \iint_{\partial D} F \cdot n ds$$

pour avoir

$$\frac{dC}{dt} = \iiint_{D(t)} \frac{\partial c}{\partial t}(x,t) dx + \iint_{\partial D(t)} cV \cdot n ds$$

Généralisation

Intégrale d'un champ de vecteurs $F(x,t) = (F_1, F_2, F_3)$

$$\mathbf{F}(t) = \iiint_{D(t)} F(x,t) dx \Leftrightarrow \mathbf{F}_i(t) = \iiint_{D(t)} F_i(x,t) dx$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{F}_i(t) &= \iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial F_i}{\partial t}(x,t) + \text{Div} (F_i(x,t)V(x,t)) \right] dx \\ &= \iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial F_i}{\partial t}(x,t) + V \text{Grad} F_i + F_i \text{Div} V \right] dx \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs F et V , on note $F \otimes V = (F_i V_j)$ le tenseur d'ordre 2 (produit contracté). Pour un tenseur d'ordre 2 $A = (A_{ij}(x)) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))^T$ (une matrice (3×3)), $\text{Div} A$ est un tenseur d'ordre 1 $F(x) = (F_1, F_2, F_3)$ (vecteur) défini par $F_i = \text{Div} A_i(x)$.

Avec cette convention on écrit d'une manière vectorielle

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \text{Div} (F \otimes V) \right] dx$$

ou encore

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \iiint_{D(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) dx + \iint_{\partial D(t)} (F \otimes V) \cdot n ds$$

de même

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + V^T \text{Grad} F + F \text{Div} V \right] dx$$

Chapitre 2

Efforts dans un milieu continu

2.1 Loi de conservation

2.1.1 Conservation de la masse. Equation de continuité

Rappel des notations

- $x = \phi(X, t)$, $V(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial X, t}$ camp de vitesse eulerien
- $D(t)$ domaine transporté par le mouvement , $D_0 = D(0)$
- $\rho(x, t)$ la masse volumique.
- $m(D(t)) = \iiint_{D(t)} \rho(x, t) dx$ masse
- La loi de conservation de masse $m(D(t)) = m(D_0)$ entraîne

$$\forall t, \quad \frac{d}{dt} m(D(t)) = 0$$

- Le théorème de transport entraîne, pour tout t

$$\iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) \right] dx$$

d'où l'équation de continuité

$$\forall t, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0 \tag{2.1}$$

Remarque 1

◦ De plus nous avons les relations :

$$\text{Div}(\rho V) = \rho \text{Div } V + V \cdot \text{Grad } \rho, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \text{Grad } \rho$$

On obtient ainsi une autre forme locale de l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{Div } V = 0$$

◦ Si $\text{Div } V = 0$ alors

$$\frac{1}{\delta \mathcal{V}} \frac{d}{dt}(\delta \mathcal{V}) = \text{Div } V(x, t) = 0 \Rightarrow \delta \mathcal{V} = \delta \mathcal{V}_0 \quad (\text{milieu incompressible})$$

de plus on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \text{Grad } \rho = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{dérivée particulière nulle})$$

Ce qui signifie que la densité de masse est constante le long des trajectoires.

2.1.2 Loi de conservation de la quantité de mouvement

- $P(t) = \iiint_{D(t)} \rho V dx$ quantité de mouvement
- Loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{dP}{dt} = F_{\text{tot}}(D(t)) := F_{\text{ext}}(D) + F_{\text{cont}}(D) \quad (2.2)$$

avec

$$F_{\text{ext}}(D) = \iiint_{D(t)} f(x, t) dx, \quad F_{\text{cont}}(D) = \iiint_{\partial D(t)} T(x, n) ds \quad (2.3)$$

où $f(x, t)$ est une densité de force appliquée à une particule (élément de volume) et $T(x, n)$ est une force de contact (pression) appliquée à un élément de surface orienté par la normale $n(x)$, $x \in \partial D$.

Tenseurs de contraintes

On a le théorème suivant

Théorème 2 (de Cauchy) Il existe un tenseur (d'ordre 2) $\sigma(x,t) = (\sigma_{ij}(x,t))$ tel que, pour tout (x,t) , on ait

$$T(x,t,n) = \sigma(x,t)n$$

Preuve. On peut trouver la preuve de ce théorème dans le livre [8]. La preuve utilise la méthode du tétraèdre qui consiste à appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un tétraèdre infinitésimal de sommet M , puis on écrit le bilan des forces appliquées aux facettes. Le tenseur σ est symétrique: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. $\square$

Retour à la loi fondamentale (2.2)

L'équation (2.2) s'écrit

$$\frac{dP}{dt} = \iint_{\partial D(t)} \sigma(x,t) \cdot n ds + \iiint_{D(t)} f(x,t) dx$$

La formule de Gauss nous donne

$$\iint_{\partial D(t)} \sigma(x,t) \cdot n ds = \iiint_{D(t)} \text{Div } \sigma dx$$

d'où

$$\frac{dP}{dt} = \iiint_{D(t)} \text{Div } \sigma dx + \iiint_{D(t)} f(x,t) dx \quad (2.4)$$

Rappel: Soit l'intégrale d'un champ de vecteurs $F(x,t) = (F_1, F_2, F_3)$

$$F(t) = \iiint_{D(t)} F(x,t) dx$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \text{Div } (F \otimes V) \right] dx \\ &= \iiint_{D(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) dx + \iint_{\partial D(t)} (F \otimes V) \cdot n ds \end{aligned}$$

Avec $F = \rho V$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= \iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial(\rho V)}{\partial t}(x,t) + \text{Div} (\rho V \otimes V) \right] dx \\
&= \iiint_{D(t)} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t}(x,t) dx + \iint_{\partial D(t)} \rho V (V \cdot n) ds
\end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}
\text{Div} (\rho V \otimes V) &= V \text{Grad} (\rho V) + \rho V \text{Div} V \\
&= \rho V \text{Grad} V + V \text{Div} (\rho V)
\end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + V \text{Grad} (\rho V) + \rho V \text{Div} V = f + \text{Div} \sigma$$

Si la masse est conservée, l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = 0$$

entraîne

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (\text{Grad} V) V \right] = f + \text{Div} \sigma \quad (\text{Equation du mouvement}) \quad (2.5)$$

équivalente à

$$\rho \frac{dV}{dt} = f + \text{Div} \sigma$$

2.2 Loi de conservation de l'énergie: premier principe de la thermodynamique

$D(t)$ domaine transporté par le mouvement $x = \phi(t, X)$

$$\mathcal{E}_{tot}(D(t)) = \iiint_{D(t)} \rho \left(\frac{1}{2} V^2 + e \right) dx \quad (2.6)$$

- $\iiint_{D(t)} \rho \left(\frac{1}{2} V^2 \right) dx$ énergie cinétique
- e énergie interne

1^{er} Principe de la thermodynamique:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \mathcal{P}_{ext}(D(t)) + \mathcal{P}_{the}(D(t)) \quad (2.7)$$

avec

$$\mathcal{P}_{the}(D(t)) = \iint_{\partial D(t)} Q(x,t)nds + \iiint_{D(t)} r(x,t)dx \quad (2.8)$$

Puissance thermique = flux de chaleur + source de chaleur

$$\mathcal{P}_{the}(D(t)) = \iiint_{D(t)} (-\text{Div } Q + r(x,t))dx \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext}(D(t)) &= \iint_{\partial D(t)} (\sigma V)nds + \iiint_{D(t)} f \cdot Vdx \quad (\text{Puissance des forces exterieures}) \\ &= \iiint_{D(t)} (\text{Div } (\sigma \cdot V) + f \cdot V)dx \end{aligned} \quad (2.10)$$

On applique le théorème de transport au champs scalaire $c(x,t) = \rho(\frac{1}{2}V^2 + e)$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_{tot}(t) = \iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \frac{1}{2}V^2 + \rho e) + \text{Div } (\rho \frac{V^2}{2}V + \rho eV) \right] dx \quad (2.11)$$

De (2.9), (2.10) et (2.11) on déduit l'équation différentielle (loi locale)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \frac{V^2}{2} + \rho e) + \text{Div } (\rho \frac{V^2}{2}V + \rho eV - \sigma \cdot V + Q) = f \cdot V + r \quad (2.12)$$

En tenant compte de l'équation de contuinuté, on peut simplifier cette équation et avoir

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + V \text{Grad } e \right) = r - \text{Div } Q + \sigma : D \quad (2.13)$$

Qu'on peut écrire

$$\rho \frac{de}{dt} = r - \text{Div } Q + \sigma : D \quad (2.14)$$

où $D(x,t) = D_{ij}$ est le tenseur du taux de déformation

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

et $\sigma : D = (\sigma_{ij} D_{ji})$ est le produit contracté.

Pour plus de détails, voir [1] ou ([8], chap. 7)

En plus de ces équations, on utilise

- la loi d'état : $\rho = \mathcal{P}(p, e)$, $e = \mathcal{E}(\rho, T)$, avec p=pression et T=température
- Loi de Fourier $Q = -k \nabla T$
- Loi de comportement: $\sigma = \mathcal{G}(\varepsilon)$ où $\varepsilon = \varepsilon_{ij}$ est le tenseur de déformation

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Chapitre 3

Applications

3.1 Elasticité linéaire

3.1.1 Essais mécaniques

Pour déterminer l'évolution d'un système déformable, nous avons déjà déterminé les équations de la cinématique et de la dynamique. A ces équations, il est maintenant nécessaire d'adjoindre une relation supplémentaire reliant les efforts internes et les grandeurs cinématiques. Cette relation, appelée Loi de Comportement, dépend du matériau considéré. La construction d'une loi de comportement est basée sur des observations expérimentales.

Dans ce chapitre nous exposerons le modèle de comportement des matériaux élastiques, sous l'hypothèse des petites perturbations.

Pour effectuer un essai de traction simple sur un métal, on utilise une éprouvette cylindrique caractérisée par:

- des extrémités surdimensionnées - des congés de raccordement (pour éviter les concentrations de contrainte)
- une partie médiane cylindrique dans laquelle le champ de contrainte est supposé homogène, de traction simple parallèlement à l'axe de l'éprouvette. L'essai de traction consiste à enregistrer l'évolution de l'allongement relatif de la longueur initiale L en fonction de la force de traction P , ou du rapport P/S , où S représente l'aire initiale de la section de l'éprouvette Q .

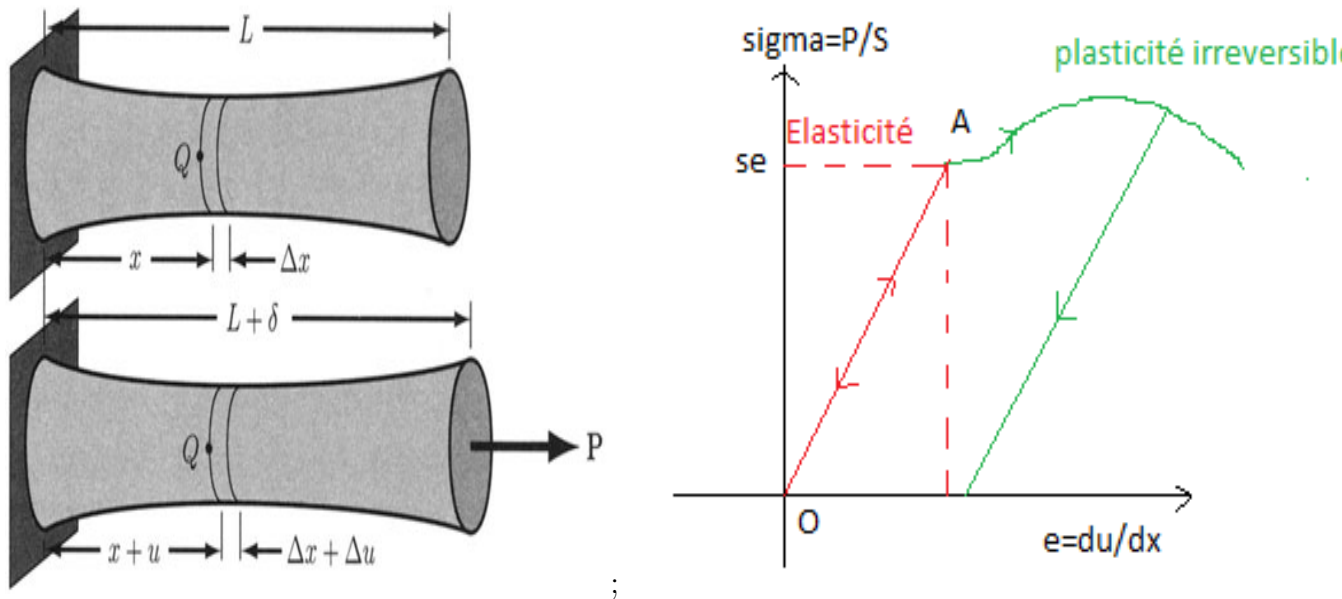


FIG. 3.1 – Essai de traction et diagramme de déformation

La figure 3.1 représente un tel enregistrement pour un acier inox. On remarque alors les propriétés suivantes:

- Le diagramme est indépendant de la vitesse de chargement
- La partie OA du diagramme est réversible. Si on charge jusqu'à un niveau inférieur à σ_0 , alors la décharge décrit la même courbe OA .
- La partie réversible est linéaire
- Si on effectue un chargement au delà du seuil σ_0 , puis une décharge, l'éprouvette présente une déformation permanente. La partie réversible du diagramme de traction est, par définition, représentative du comportement élastique du matériau. σ_0 est la limite initiale d'élasticité du matériau. La linéarité du segment OA caractérise le comportement élastique linéaire du matériau.

On définit la déformation au point Q par

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Si le cylindre a une section constante alors la déformation longitudinale est donnée par $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$, où L est la longueur initiale de la tige et δ est le changement de la longueur.

Module de Young

Pour la plupart des matériaux d'ingénierie, si la déformation longitudinale est suffisamment faible, la déformation est élastique et la relation entre la contrainte normale et la déformation longitudinale est approximativement linéaire - on peut écrire

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.1)$$

Cette relation est connue sous le nom de loi de Hooke et le coefficient E est une propriété du matériau appelée module de Young.

Coefficient de Poisson

L'extension axiale s'accompagne d'une contraction dans les directions transversales. Ainsi, lors de la déformation élastique, il existe en plus une déformation latérale $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ à la déformation axiale $\varepsilon_x = \sigma/E$ donnée par la loi de Hooke. Les déformations latérales et la déformation axiale sont liées par le coefficient de Poisson;

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}.$$

Le coefficient de Poisson ν est une autre propriété matérielle.

Exemple: Propriétés de l'Acier, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.285$, $\rho = 7.8 \text{ Kg/dm}^3$.

Déformation de cisaillement

Considérons l'élément rectangulaire soumis à la contrainte de cisaillement uniforme τ illustré à la figure 3.2. La déformation de cisaillement (orthogonale) est définie comme la réduction dans l'angle initialement droit $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, de sorte que

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \angle B'A'C'$$

Pour la plupart des matériaux d'ingénierie, la relation entre la contrainte de cisaillement et la déformation pendant la déformation élastique est approximativement linéaire et on peut écrire

$$\tau = G\gamma$$

où G est une propriété de matériau appelée module de cisaillement. Il peut être montré en tenant compte de la déformation dans différents systèmes

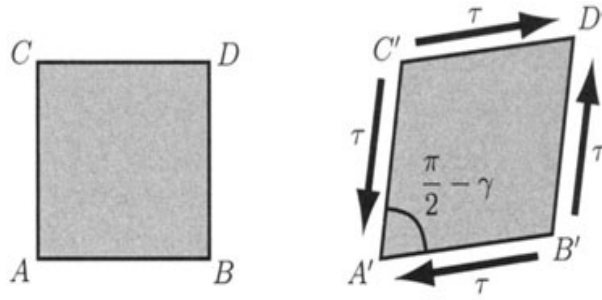


FIG. 3.2 – *Essai de cisaillement*

de coordonnées que le module de Young E , le coefficient de Poisson ν et le module de cisaillement G ne sont pas indépendants. En effet, ils sont liés par

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

3.1.2 Loi de Hooke généralisée

Champ de déplacement

Notations.

- Déformation $x = \phi(X)$, $F(X) = \nabla \phi(X)$
- Déplacement $u(X) = x - X$

$$\delta u = H(X)\delta X, \quad H(X) = \nabla u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) = F(X) - I$$

Hypothèses:

- $|u|$ est petit devant la dimension du milieu Ω_0 .
- Tenseur de petites déformations

$$\varepsilon(X) = \frac{1}{2}(H^T + H), \quad \varepsilon_{ij}(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

- Hypothèses de petite déformations: si $\eta = \|H(X)\|$ petit devant 1, alors le tenseur de Cauchy

$$C(X) = I + 2\varepsilon(X) + O(\eta^2)$$

donc $\varepsilon = L$ tenseur de Green-Lagrange

Les champs de déformation et de contrainte dans un milieu continu sont liés par des lois appelées lois de comportement. Ces lois caractérisent le comportement mécanique de ce milieu. Le comportement élastique d'un milieu continu est caractérisé par une relation linéaire liant les contraintes aux déformations :

$$[\sigma] = [C].[\varepsilon]$$

où C est un tenseur d'ordre 4. En notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Compte tenu de la symétrie des deux tenseurs (σ_{ij}) et (ε_{ij}) on peut écrire que :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

A cause de sa symétrie, le tenseur d'élasticité $[C]$ fait apparaître (21) coefficients au lieu de (36).

Définition 3 – *Le milieu est dit homogène si C_{ijkl} ne dépend pas de X ($C(X) = C$).*
– *Le milieu est dit isotrope si la relation $[\sigma] = [C].[\varepsilon]$ est invariante sous l'action des rotations d'espace (ie si on change le repère, le tenseur C ne change pas)*

Si le milieu est isotrope on a :

$$\begin{aligned} [\sigma] = [C].[\varepsilon] &\Leftrightarrow \sigma(u) = \lambda(\operatorname{div} u)I + 2\mu\varepsilon(u) \\ &\Leftrightarrow \sigma_{ij}(X) = \lambda(X)\operatorname{trace}(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu(X)\varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

λ et μ appelés coefficients de Lamé liés au module de Young E et le coefficient de Poisson ν par les relations

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

La démonstration de ce résultat est algébrique, pour les détails voir par exemple les références [7, 9].

3.1.3 Système d'élasticité de Lamé

Conservation de la masse

L'hypothèse $H(X) \ll 1$ entraîne

$$J(X, t) = \det(F) = \det(I + H) \simeq 1$$

d'autre part

$$\rho^P(X) = J(X,t)\rho^E(x,t) \Rightarrow \rho(x,t) = \rho_0(X) = \rho_0 \quad (\text{si le milieu est homogène})$$

Dans ce cas l'équation de continuité $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = 0$ entraîne $\text{div } V = 0$.
L'hypothèse de petites déformations signifie que le champ de déplacement $u = x - X$ est petit (par rapport à la dimension du corps déformable). Donc on peut confondre la variable d'Euler x et la variable de Lagrange X , par suite on peut poser $u(X,t) = u(x,t)$.

On a $V = \frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Rappelons l'équation du mouvement

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (\text{Grad } V)V \right] = f + \text{Div } \sigma$$

L'hypothèse $\|\nabla u\| \ll 1$ permet de négliger le terme $(\text{Grad } V)V$ devant $\frac{\partial V}{\partial t}$.
L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \text{Div } \sigma$$

On peut montrer (en exercice) que

$$\text{Div}(\sigma) = (\lambda + \mu)\text{Grad}(\text{Div } u) + \mu\Delta u$$

d'où le système complet de Lamé

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + (\lambda + \mu)\text{Grad}(\text{Div } u) + \mu\Delta u$$

équivalent à

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right) \quad i = 1, 2, 3.$$

Conditions initiales:

$$u(x,0) = u_0(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega$$

Conditions aux limites:

- Déplacement imposé: $v(x,t) = \lim_{y \rightarrow x} u(y,t)$, $x \in \partial\Omega$, $t > 0$
- Contrainte imposée: $T(x,t;n) := \sigma(x,t) \cdot n = F_{cont}(x,t)$, $x \in \partial\Omega$, $t > 0$.

3.2 Mécanique des fluides

3.2.1 Introduction

Nous allons aborder dans ce chapitre l'étude du mouvement des fluides sous l'action des forces extérieures. Nous nous limitons aux écoulements où les variations de la masse volumique sont négligeables: le fluide sera donc supposé **incompressible**.

Les forces extérieures englobent les forces de volume et les forces de surface. L'expression des forces de surface dépend principalement de la nature de la physique du fluide et de la cinématique de l'écoulement. En effet, dans certains cas, le fluide peut être considéré comme dépourvu de frottement: ce fluide est dit **parfait**. Par contre, dans les autres écoulements, les forces de frottement ne peuvent plus être négligées et le fluide est dit **visqueux**.

Notations:

- x variable d'Euler
- On note $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)$ le champ de vitesse Eulerien (au lieu de $V(x,t)$)
- Pression: $p(x,t)$.

Rappel. Avec les notations précédentes rappelons les équations du mouvement d'un MC:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u &= 0 \\ \rho \frac{du}{dt} &= f + \operatorname{div} \sigma\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad} \rho \quad (\text{dérivée particulaire}) \\ \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad} u \\ \text{avec } u \cdot \operatorname{grad} u &= (u \cdot \nabla u_1, u \cdot \nabla u_2, u \cdot \nabla u_3)^t\end{aligned}$$

3.2.2 Fluide parfait

- Caractérisé par la loi de comportement: $\sigma = -pI$
- On suppose que le milieu est adiabatique (pas d'échange de chaleur), donc $r = 0$ et $Q = 0$.

- Le fluide est incompressible, donc $\operatorname{div} u = 0$, par suite $\frac{d\rho}{dt} = 0$ et $\rho(x,t) = \rho_0$.

Equations d'évolution.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} u &= 0 \\ \rho \frac{du}{dt} &= f - \nabla p\end{aligned}$$

La deuxième équation s'écrit sous la forme du système (d'Euler)

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

3.2.3 Fluide newtonien

Dans un fluide non visqueux, la loi de comportement prend la forme générale

$$\sigma(x,t) = -pI + \lambda(\operatorname{div} u)I + 2\mu D(x,t)$$

où

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{est le tenseur des taux de déformation au point } x$$

Noté aussi ε , $\tau = 2\mu\varepsilon$ est appelé tenseur des contraintes de viscosité, μ viscosité du fluide. Si $\mu \neq 0$, on dit que le fluide est visqueux.

Si le fluide est incompressible $\operatorname{div} u = 0$.

Donc un fluide est parfait s'il est incompressible et non visqueux.

Equations de Navier-Stokes

Pour un fluide visqueux on a les équations de Navier-Stokes-compressible

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u = 0$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p + f + (\lambda + \mu) \operatorname{Grad}(\operatorname{Div} u) + \mu \Delta u$$

Si le fluide est incompressible on a $\text{Div } u = 0$ et l'équation s'écrit sous forme du système

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Ce sont les équations de N-S pour un fluide Newtonien , incompressible et de viscosité constante.

Ecoulement stationnaire

Si l'écoulement est permanent $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, on obtient l'équation de Stokes

$$\begin{cases} \text{Div } u = 0 \\ u \cdot \nabla u + \nabla p - \mu \Delta u = f \end{cases}$$

Ce sont des équations non-linéaires, la résolution nécessite des conditions aux limites (adhérence sur les parois solides) et des conditions initiales (écoulement non permanent).

Bibliographie

- [1] O. Thual, Introd. MMC Déformables (Polytech, 1977)
- [2] J. Salençon, MMC, Ed. Ecole Polytech, Paris (2007)
- [3] F. Goley et S. Bonelli, MMC (ISITV, 2011)
- [4] MMC, Arts et Métiers, Paris-Tech (2013)
- [5] S. DEGHBODJ, Mécaniques des Milieux continus Cours et Applications, Université Larbi Tébessi de Tébessa, Département de Génie Mécanique
<https://www.researchgate.net/publication/311909114>
- [6] A. Guerziz, Eléments de mécanique des fluides avec exercices corrigés, Publications de l'Université Badji Mokhtar, Annaba (2010)
- [7] S. Belkahla, Cours d'élasticité-plasticité, Publications de l'Université Badji Mokhtar, Annaba (2010)
- [8] J. Coirier et C. Nadot-Martin, MMC, Science Sup, Dunod (3ème édition)(2007).
- [9] W.S. Slaughter, The Linearized Theory of Elasticity, Springer Science+Business Media New York, 2002. DOI 10.1007/978-1-4612-0093-2