Université Badji Mokhtar -Annaba -
Faculté des Sciences
Tronc Commun Mathématiques et Informatique
Module Algèbre 2
Durée : 1h30mn

Année 2013/2014

Sujet d'Examen

Exercice n°1: (7 points)

I) Soit E un K-espace vectoriel dont l'élément neutre est noté par 0_E. Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriel de E. Montrer que $V_1 \cap V_2$ est sous-espace vectoriel de E.

II) Soit f une application linéaire de E vers F. Montrer que :

1) $f(0) = 0$. **2)** L'application f est injective si $kerf = \{0_E\}$. **3)** Est-ce que la réciproque de 2 est vraie ?

III) Soit F un sous-ensemble de IR^3 défini par : $F = \{(x, y, z) \in IR^3 : 2x + 3y + z = 0\}$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de IR^3. **2)** Déterminer une base pour F ainsi que sa dimension.

Exercice n°2: (4 points)

Soit $a \in IR^*$ et soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A - A^2 + 2I_3 = 0$. **2)** Déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice n°3: (9 points)

Soit f une application Linéaire définie de IR^3 dans IR^3 par

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x - y - z, z)$$

1) Déterminer $kerf$ (base et dimension). **2)** Déduire le rang de f. **3)** Déterminer une base pour Imf. **4)** Est-ce que f est injective ? surjective ? Pourquoi ? **5)** Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique de IR^3. **6)** Montrer que la partie $B' = \{e'_1 = (1, -1, 0), e'_2 = (0, -1, 1), e'_3 = (0, 1, 0)\}$ est une base de IR^3. **7)** Trouver la matrice de passage P de la base canonique B à la base B'. **8)** Trouver la matrice de passage Q de la base B' à la base B. Vérifie que $P = Q^{-1}$.

Bon Courage

Corrigé de l'examen (Algèbre 2)

Ex1:

$V_1 \cap V_2$ s.e.v de $E \iff \begin{cases} a) & V_1\cap V_2 \neq \phi \\ b) & \forall u_1, u_2 \in V_1\cap V_2 \Rightarrow u_1+u_2 \in V_1\cap V_2 \\ c) & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in V_1\cap V_2 \Rightarrow \lambda u \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$ 0,5

$\left.\begin{array}{l} 0_E \in V_1 \text{ car } V_1 \text{ s.e.v de } E \\ 0_E \in V_2 \text{ car } V_2 \text{ s.e.v de } E \end{array}\right\} \Rightarrow 0_E \in V_1\cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \phi$ 0,25

soient $u_1, u_2 \in V_1 \cap V_2$

$u_1 \in V_1\cap V_2 \Rightarrow u_1 \in V_1$ et $u_1 \in V_2$

$u_2 \in V_1\cap V_2 \Rightarrow u_2 \in V_1$ et $u_2 \in V_2$ 0,75

$\Rightarrow \begin{cases} u_1+u_2 \in V_1 \text{ car } V_1 \text{ s.e.v de } E \\ u_1+u_2 \in V_2 \text{ car } V_2 \text{ s.e.v de } E \end{cases} \Rightarrow u_1+u_2 \in V_1 \cap V_2$

) soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in V_1 \cap V_2$

$u \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \begin{cases} u \in V_1 \Rightarrow \lambda u \in V_1 \text{ car } V_1 \text{ s.e.v de } E \\ u \in V_2 \Rightarrow \lambda u \in V_2 \text{ car } V_2 \text{ s.e.v de } E \\ \Rightarrow \lambda u \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$ 0,5

d'ou $V_1 \cap V_2$ est un s.e.v de E.

① $f(0) \overset{?}{=} 0$

$f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0) \Rightarrow$ 1

$f(0) + (-f(0)) = f(0)+f(0) + (-f(0))$

$\Rightarrow \boxed{0 = f(0)}$

) soit $x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0 = f(0) \xrightarrow{f \text{ est injective}} x = 0$ 0,5 0,5

) La réciproque est vraie car

Si $\ker f = \{0_E\}$, alors pour $x, y \in E$ et $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in \ker f = \{0\}$ 0,25 0,25

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ est injective. 0,25 0,25

II) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 0\}$

1) ⓐ $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ car : $2(0) + 3(0) + 0 = 0 \Rightarrow F \neq \emptyset$ 0,25

ⓑ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in F \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha u + \beta v \in F$

$u = (x_1, y_1, z_1) \in F \Rightarrow 2x_1 + 3y_1 + z_1 = 0$ 0,5

$v = (x_2, y_2, z_2) \in F \Rightarrow 2x_2 + 3y_2 + z_2 = 0$

$\alpha u + \beta v = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$

on a : $2(\alpha x_1 + \beta x_2) + 3(\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)$ 0,75

$= \alpha(2x_1 + 3y + z_1) + \beta(2x_2 + 3y_2 + z_2) = \alpha(0) + \beta(0) = 0$ 0,5

$\Leftrightarrow \alpha u + \beta v \in F$

donc de ⓐ et ⓑ F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2) $F = \{(x, y, -2x - 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x\underbrace{(1, 0, -2)}_{u_1} + y\underbrace{(0, 1, -3)}_{u_2} : x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x u_1 + y u_2 : x, y \in \mathbb{R}\} = \langle u_1, u_2 \rangle$

$\Rightarrow F$ est engendré par u_1 et u_2.

Soient $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$: $\beta_1 \vec{u_1} + \beta_2 \vec{u_2} = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0$

$\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ libre, d'où $\{u_1, u_2\}$ est une base

pour $F \Rightarrow \dim F = 2$. 0,5

Ex2 :

1) $A - A^2 + 2I_3 \overset{?}{=} 0$ $\qquad 2I_3 = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 0,5

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$A - A^2 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 0,5

2) on a : $A - A^2 + 2I_3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(A^2 - A) = I_3$ 0,5

$$\Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3 & 0,5 \\ \frac{1}{2}(A - I_3)\,A = I_3 & 0,5 \end{cases}$$

donc $\exists\, B = \frac{1}{2}(A - I_3)$ tel que $AB = BA = I_3$ 0,25

$\Rightarrow$ A est inversible et $A^{-1} = B = \frac{1}{2}(A - I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{2} \\ \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 0,75

Ex3

1)* $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ 0,25

$f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (x-y+z, x-y-z, z) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$ 0,25 $\Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ 0,25

$\Rightarrow \ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y, z=0\}$

$= \{(x,x,0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x\underbrace{(1,1,0)}_{\vec{u}} : x \in \mathbb{R}\}$ 0,25

$= \langle \vec{u} \rangle \Rightarrow \vec{u}$ engendre $\ker f$ 0,25

$\vec{u} = (1,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \{\vec{u}\}$ est une base de $\ker f$ 0,25

$\Rightarrow \dim \ker f = 1$ 0,25

0,75

2) $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3-1=2$

3) La base de Im f

$\operatorname{Im} f = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \exists \vec{u} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = f(\vec{u})\}$ 0,25

$= \{(x-y+z, x-y-z, z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x-y)\underbrace{(1,1,0)}_{\vec{v_1}} + z\underbrace{(1,-1,1)}_{\vec{v_2}} : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ 0,25

$= \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle \Rightarrow \vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ engendrent Im f 0,25

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \alpha_1 \vec{v} + \alpha_2 \vec{v_2} = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_1, 0) + (\alpha_2, -\alpha_2, \alpha_2) = (0,0,0)$

0,25

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\Rightarrow \vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont linéairement indépendants.

donc $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est une base de $\mathrm{Im}f$. 0,5

4) $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Leftrightarrow f$ n'est pas injective

$\Leftrightarrow f$ n'est pas surjective 0,5

ou bien : $2 = \dim \mathrm{Im} f \neq \dim F = 3 \Leftrightarrow f$ n'est pas surjec

5) $f(\vec{e_1}) = f(1,0,0) = (1,1,0)$ 0,25

$f(\vec{e_2}) = f(0,1,0) = (-1,-1,0)$ 0,25 $\Rightarrow M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

$f(\vec{e_3}) = f(0,0,1) = (1,-1,1)$ 0,25

6) • $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$: $\alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3} = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 =$

$\Rightarrow B'$ est libre 0,25

• on a aussi $\operatorname{card} B' = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ 0,25 $\Rightarrow B'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ 0,25

7) La matrice de passage P de B à B' :

$\vec{e_1}' = (1,-1,0) = 1(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + 0(0,0,1)$ 0,25

$= 1\,\vec{e_1} + (-1)\vec{e_2} + 0\,\vec{e_3}$

$\vec{e_2}' = (0,-1,1) = 0(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + 1(0,0,1)$ 0,25

$= 0\,\vec{e_1} + (-1)\vec{e_2} + 1\,\vec{e_3}$

$\vec{e_3}' = (0,1,0) = 0\,\vec{e_1} + 1\,\vec{e_2} + 0\,\vec{e_3}$ 0,25

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 0,5

①. La matrice de passage φ de B' à B.

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (1,0,0) = \alpha_1 \underbrace{(1,-1,0)}_{\vec{e}\,'_1} + \alpha_2 \underbrace{(0,-1,1)}_{\vec{e}\,'_2} + \alpha_3 \underbrace{(0,1,0)}_{\vec{e}\,'_3} \\ \vec{e}_2 = (0,1,0) = B_1(1,-1,0) + B_2(0,-1,1) + B_3(0,1,0) \\ \vec{e}_3 = (0,0,1) = \gamma_1(1,-1,0) + \gamma_2(0,-1,1) + \gamma_3(0,1,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1,0,0) = (\alpha_1, -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2) \\ (0,1,0) = (B_1, -B_1 - B_2 + B_3, B_2) \\ (0,0,1) = (\gamma_1, -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3, \gamma_2) \end{cases} \quad 0,5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 1 \\ B_1 = 0, \ B_2 = 0, \ B_3 = 1 \\ \gamma_1 = 0, \ \gamma_2 = 1, \ \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 0,5$$

Comme $P \cdot \varphi = I \Rightarrow P = \varphi^{-1}$ 0,5