Module : Analyse fonctionnelle appliquée 17/5/20
Master 1 de Mathématiques Appliquées

Réponses Série 3
Espaces de Sobolev

Excercice 1.
Réponse :
– Facile de voir que $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\|\tilde{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$.
– Montrons que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$: soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\begin{aligned}
< D_i\tilde{u}, \varphi > &= -\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx, \quad (1 \leq i \leq n-1)\\
&= -\int_{\mathbb{R}^n_+} u(x', x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx - \int_{\mathbb{R}^n_-} u(x', -x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} \varphi\frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n)dx + \int_{\mathbb{R}^n_-} \varphi\frac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_n)dx \quad \text{car } \tilde{u}(x', 0^+) = \tilde{u}(x', 0^-) \text{ sur } \mathbb{R}^{n-1}
\end{aligned}$$

d'où

$$D_i\tilde{u}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n) & si \quad x_n > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_n) & si \quad x_n < 0 \end{cases}$$

De même, on montre que

$$D_n\tilde{u}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n) & si \quad x_n > 0 \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x', -x_n) & si \quad x_n < 0 \end{cases}$$

donc $D_i\tilde{u} \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2, \cdots, n$; et $\|\nabla\tilde{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ □

Excercice 2.
Considérons la suite de fonctions $v_n(x) = \exp(-nx)$ pour $x \geq 0$. v_n convergence dans $L^2(I)$, $I = \mathbb{R}^*_+$, en effet on a

$$\|v_n\|^2_{L^2(I)} = \frac{1}{2n} \to 0$$

Supposons que l'on peut définir une application trace

$$\begin{array}{rcc} \gamma_0 : D(\bar{I}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & \gamma_0(u) = u(0) \end{array}$$

linéaire continue sur $L^2(I)$. Posons $\varphi_n = v_n\tau_n$ où $\tau_n \in D(\mathbb{R})$ une suite de troncature, alors il existe $C \geq 0$ tel que, quelque soit n,

$$\varphi_n(0) = 1 \leq C\|\varphi_n\|_{L^2(I)} \leq \frac{C}{2n}$$

ce qui est impossible.

Excercice 3.

- (a) C'est une question de géométrie différentielle. Uiliser un système de cartes locales de $\hat{\Omega}$, ...
- (b) Soit $v \in H^1(\Omega)$ et $F : y \to x = F(y)$, Posons $u = v \circ F$, alors si on applique la Proposition IX.6 du livre de H. Brézis, la fonction $u(y) = v(F(y))$ appartient à $H^1(\hat{\Omega})$ et on a la formule de changement de variables

$$\frac{\partial u}{\partial y_j}(y) = \sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i}(F(y))\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y), \quad \forall j = 1 : n$$

On en déduit les inégalités

$$\|u\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq \|DF\|_{L^\infty}^{1/2}\|v\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\|\nabla u\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq \|DF\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

$\Rightarrow$

$$\|u\|_{H^1(\hat{\Omega})} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Ce qui prouve que l'application $\mathcal{F}$ est linéaire continu. Elle est bijective avec

$$\mathcal{F}^{-1} : u \to v = u \circ F^{-1}$$

qui est bornée. □

Excercice 4.
Cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Soit $u \in D(\mathbb{R}^n_+)$ et $u_p = u\varphi_p$ avec la fonction de troncature

$$\varphi_p(x) = \varphi(px_n); \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t > 2 \\ 0 & si \quad 0 < t < 1 \end{cases}$$

Vérifions que $u_p \to u$ dans L^2.

$$\int_\Omega |u - u_p|^2 dx \leq \int_{\Omega_p} |u|^2 dx \to 0 \quad (car \ \mathrm{mes}(\Omega_p) \leq \frac{2}{p}\ \mathrm{mes}(B(0,R)) \to 0)$$

avec $\Omega_p = \{x = (x', x_n)/|x'| \leq R, \ \ 0 \leq x_n \leq \frac{2}{p}\}$ et supp $\varphi \subset B(0,R) \times [0,H]$.
D'autre part

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u - u_p) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(1 - \varphi_p) \quad i = 1, n-1$$
$$\frac{\partial}{\partial x_n}(u - u_p) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(1 - \varphi_p) + up\varphi_p$$

d'où, pour $i = 1, n-1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\frac{\partial}{\partial x_i}(u - u_p)|^2 dx \leq \int_{\Omega_p} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx \to 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\frac{\partial}{\partial x_n}(u - u_p)|^2 dx \leq 2\int_{\Omega_p} |\frac{\partial u}{\partial x_n}|^2 dx + 2p^2 \int_{\Omega_p} |u|^2 dx \times \sup_{1<t<2} |\varphi(t)|$$

Comme $u(x',0)=0$, on a aussi

$$u(x',x_n)=\int_0^{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}dx \Rightarrow \int_{\Omega_p}|u|^2dx \le \frac{4}{p^2}\int_{\Omega_p}|\frac{\partial u}{\partial x_n}|^2dx$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}|\frac{\partial}{\partial x_i}(u-u_p)|^2dx \le C\int_{\Omega_p}|\frac{\partial u}{\partial x_n}|^2dx \to 0.$$

Cas général Ω borné régulier. On se ramène par carte locale et partition de l'unité, à un demi-espace. Voir le cours de G. Allaire page 102. $\square$

Excercice 5.
Soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, alors, pour tout $i=1,n$

$$\begin{aligned} < D_i\tilde{u},\varphi > &= -\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{u}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx \\ &= \int_\Omega \varphi\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \quad car\ u=0\ sur\ \Gamma \end{aligned}$$

donc

$$D_i\tilde{u}(x)=\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) & si \quad x\in\Omega \\ 0 & si \quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega \end{cases}$$

Excercice 6.
($\Rightarrow$) Soit $u\in H^1_0(\Omega)$, il existe une suite $u_n\in D(\Omega)$ qui converge vers u dans $H^1(\Omega)$. Comme $\gamma_0(u_n)=0$ sur Γ et l'application trace $\gamma_0 : H^1(\Omega)\to L^2(\Gamma)$ est continue, on en déduit $\gamma_0(u)=0$ sur Γ.

($\Leftarrow$) Soit $u\in H^1(\Omega)$ et $\gamma_0(u)=0$ sur Γ.
Supposons $\Omega=\mathbb{R}^n_+$. On prolonge u par zéro, noté $\tilde{u}$. Posons $v_h=\tilde{u}(x',x_n-h)$, alors $v_h\to u$ dans $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ (je vous laisse le détail). Maintenant on régularise v_h à l'aide de la suite $v_{h,\epsilon}=v_h*\rho_\epsilon$, ρ_ϵ est la suite régularisante ($\rho_\epsilon\in D(B(0,\epsilon))$,$\int_B\rho_\epsilon(x)dx=1$). Alors $v_{h,\epsilon}\in D(\mathbb{R}^n_+)$ et $v_{h,\epsilon}\to u$ dans $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ lorsque $h\to 0$ et $\epsilon\to 0$.

Cas général : Ω borné régulier. On utilise les cartes locales avec une partition de l'unité. Pour plus de détails voir le cours de G.Allaire (corollaire 4.3.16) ou le livre de H.Brézis (théorème IX.18).