

Master: Maths-Applic  es
Module: Analyse fonctionnelle appliquée

Lahc  ne CHORFI
Dept. de Maths, Université B.M. d' Annaba

Avril 2020

Table des matières

1	Espaces de Sobolev	2
1.1	Espace $H^1(\Omega)$	2
1.1.1	Dérivée faible	3
1.1.2	Définition et propriétés	3
1.1.3	Espace $H^1(I)$, $I =]a, b[$	4
1.1.4	Théorème de compacité	5
1.1.5	Théorème de densité	5
1.2	Théorème de trace et formule de Green	7
1.3	Espace $H^m(\Omega)$	9
1.3.1	Traces des éléments de $H^m(\Omega)$	9
1.3.2	Injections de Sobolev	10
1.4	Espace $H^{-1}(\Omega)$	12
2	Résolution de problèmes aux limites elliptiques par la méthode variationnelle	13
2.1	Rappel: Théorème de Lax-Milgram	13
2.2	Problème de Dirichlet et de Neumann sur $I =]a, b[$	14
2.2.1	Formulation variationnelle	14
2.3	Problèmes elliptiques en dimension $N \geq 2$	15
2.3.1	Problèmes de Dirichlet homogène	15
2.3.2	Problèmes de Dirichlet non homogène	17
2.3.3	Problèmes de Neumann non homogène	17
2.3.4	Autres exemples	19
2.3.5	Problèmes elliptiques du second ordre	20
2.3.6	Régularité de la solution faible	22

Chapitre 1

Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces dont les éléments sont des fonctions, et ces fonctions sont telles que leurs puissances et les puissances de leurs dérivées (au sens des distributions) sont intégrables au sens de Lebesgue. Ces espaces sont des espaces de Banach. Le fait que les espaces de Sobolev sont complets est très important pour démontrer l'existence de solutions à de nombreuses équations aux dérivées partielles.

1.1 Espace $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$. On définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de carré sommables dans Ω muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

On note $C_c^\infty(\Omega)$ (ou $D(\Omega)$) l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact sur Ω .

Théorème 1 *L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Preuve. (voir [1], théorème 3.4.3)

1.1.1 Dérivée faible

Définition 1 Soit $u \in L^2(\Omega)$, $w_i \in L^2(\Omega)$ est dite dérivée faible de u par rapport à sa i -ème variable si, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx$$

w_i est notée $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. On note $\nabla u = (w_1, w_2, \dots, w_N) \in L^2(\Omega)^N$ le gradient de u

Remarque 1 – Si u est dérivable au sens usuel (classique) et $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, alors la dérivée faible w_i coïncide avec $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

– La dérivée faible, si elle existe, coïncide avec la dérivée au sens des distributions $D_i u$, défini par le crochet de dualité

$$\langle D_i u, \phi \rangle_{D', D} = - \langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle_{D', D}, \quad D^* \text{ est le dual topologique de } D = C_c^\infty(\Omega) \text{ muni de la convergence simple.}$$

– Inversement si $D_i u \in L^2(\Omega)$, c'est à dire il existe $w_i \in L^2(\Omega)$ t.q

$$\langle D_i u, \phi \rangle = -(w_i, \phi)_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, alors $\frac{\partial u}{\partial x_i} = D_i u$.

– De même, on défini la dérivée faible d'ordre $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, $D^\alpha u = w_\alpha \in L^2(\Omega)$ si

$$(u, D^\alpha \phi)_{L^2} = (-1)^{|\alpha|} (w_\alpha, \phi)_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, où $D^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$

1.1.2 Définition et propriétés

Définition 2 (Espaces de Sobolev) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$.

– 1. L'espace $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D_i u \in L^2(\Omega); \forall i = 1; \dots; N\}$$

– 2. L'espace $H^m(\Omega)$, pour $m \in \mathbf{N}^*$, est défini par :

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D^\alpha u \in L^2(\Omega); \forall \alpha \in \mathbf{N}^N; |\alpha| \leq m\}$$

Proposition 1 *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorsqu'on les munit du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

En particulier

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx$$

1.1.3 Espace $H^1(I)$, $I =]a, b[$

Théorème 2 *Soit $u \in H^1(I)$, alors*

- 1. *u est absolument continue sur $[a, b]$:*

$$\forall x, y \in \bar{I}, u(x) = u(y) + \int_x^y u'(t) dt$$

- 2.

$$\forall x, y \in \bar{I}, |u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1/2} \|u'\|_{L^2(I)}$$

- 3. *Il existe $C = C(a, b)$ tel que*

$$\forall x \in \bar{I}, |u(x)| \leq C \|u\|_{H^1(I)}$$

Preuve. 1- $f = Du \in L^2$, posons

$$v(x) = \int_a^x f(t) dt$$

v est absolument continue (primitive d'une fonction de L^1).

Montrons que $DG = f$ au sens de $D'(I)$. Pour tout $\varphi \in D(I)$, on a

$$\langle DG, \varphi \rangle = - \langle G, \varphi' \rangle = - \int_a^b \left(\int_a^x f(t) dt \right) \varphi'(x) dx$$

En échangeant l'ordre d'intégration, on a

$$\langle DG, \varphi \rangle = - \int_a^b \left(\int_t^b \varphi'(x) dx \right) f(t) dt$$

d'où

$$\langle DG, \varphi \rangle = - \int_a^b \varphi(t) f(t) dt = \langle f, \varphi \rangle$$

Donc $DG = f = Du$, par suite $G = u + C$, ce qui prouve la formule (1).

Les propriétés (2) et (3) découlent de (1).

Théorème 3 (de Rellich) *Si I est borné, alors l'injection $H^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ est compacte.*

Preuve. Il suffit de montrer que l'injection $H^1(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ est compacte car l'injection $C(\bar{I}) \hookrightarrow L^2(I)$ est continue. Pour cela on utilise le théorème d'Ascoli. Soit B une partie bornée de $H^1(I)$, alors

- B est bornée dans $C(\bar{I})$ d'après la propriété (3)
- B est équicontinue d'après la propriété (2)

1.1.4 Théorème de compacité

Le théorème précédent se généralise à la dimension $N \geq 2$ ([1])

Théorème 4 (Rellich) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, ($N \geq 1$). Toute partie bornée de $H_0^1(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.*

1.1.5 Théorème de densité

Rappel. Un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^N$ est dit régulier (ou de classe C^1) si le bord de Ω est localement le graphe d'une fonction de classe C^1 et que Ω est (localement) d'un seul côté de ce graphe.

Théorème 5 (Densité et prolongement) *Soit Ω un ouvert borné et régulier, alors :*

- 1. l'ensemble $C^\infty(\bar{\Omega})$ des restrictions à des fonctions $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.
- 2. Il existe une application linéaire continue $P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\forall u \in H^1(\Omega); P(u) = u \text{ p.p. dans } \Omega$$

Preuve. 1- La démonstration se fait par troncature et régularisation. Voir [2], proposition 4.4.2.

2- Essayons de donner la preuve pour le cas le plus simple $N = 1$

Cas $I =]0, +\infty[$.

Prolongeons par réflexion

$$Pu(x) = \begin{cases} u(x), & x > 0 \\ u(-x), & x < 0 \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que $v = Pu \in H^1(\mathbf{R})$ et $\|v\|_{H^1(\mathbf{R})} = \sqrt{2}\|u\|_{H^1(\mathbf{R}_+)}$.

Cas $I =]a, b[$.

Supposons $u \in H^1(0,1)$, il existe une fonction $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ tel que

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha(x) \leq 1 & \text{si } x \in I = (0,1) \\ \alpha(x) = 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \alpha(x) = 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Posons

$$v = \alpha\tilde{u} + (1 - \alpha)\tilde{u}$$

où $\tilde{u}$ est le prolongement de u par zéro hors de $I = (0,1)$.

Alors $v_1 = \alpha\tilde{u} \in H^1(0, +\infty)$ et $v_2 = (1 - \alpha)\tilde{u} \in H^1(-\infty, 1)$

D'après le cas précédent, il existe Pv_1 et Pv_2 deux prolongements appartenant à $H^1(\mathbf{R})$ tel que

$$\|Pv_i\|_{H^1(\mathbf{R})} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^1(0,1)}, \quad i = 1, 2 \quad (C(\alpha) = \|\alpha\|_{C^1})$$

Alors $Pu = Pv_1 + Pv_2$ est un prolongement de u appartenant à $H^1(\mathbf{R})$, de plus il existe $C(\alpha) \geq 0$ tel que

$$\|Pu\|_{H^1(\mathbf{R})} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^1(0,1)}$$

□

Définition 3 (Espace $H_0^1(\Omega)$) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$. On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu'on note aussi :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

Si $\Omega = \mathbf{R}^N$ on a $H_0^1(\mathbf{R}^N) = H^1(\mathbf{R}^N)$ alors que l'inclusion est stricte si Ω est un ouvert borné.

Proposition 2 (*Inégalité de Poincaré*) Soit Ω un ouvert borné (au moins dans une direction). Il existe une constante $C > 0$ tel que pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \geq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \quad (1.1)$$

Preuve. Pour les fonctions $v \in C_0^\infty(\Omega)$, on a déjà démontré l'inégalité de Poincaré (1.1). Par un argument de densité, l'inégalité reste vraie pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

1.2 Théorème de trace et formule de Green

Lorsque u est une fonction de $L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^N$, on ne peut pas considérer la restriction de la fonction à un ensemble de mesure nulle car les fonctions de $L^2(\Omega)$ sont justement définies à un ensemble de mesure nulle près. De même les fonctions de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ ne sont plus régulières si $N > 2$. Nous allons montrer dans cette partie qu'il n'est pas nécessaire que la fonction ait un représentant continu pour que l'on puisse considérer sa restriction à $\Gamma := \partial\Omega$. C'est ce que nous appellerons la trace de la fonction sur le bord du domaine.

Cas du demi-espace $\mathbf{R}_+^N$

Commençons par traiter le cas du demi-espace, c'est à dire

$$\mathbf{R}_+^N := \{x = (x'; x_N) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R} : x_N > 0\}$$

On a alors

$$\Gamma := \{x = (x'; 0) : x' \in \mathbf{R}^{N-1}\}$$

que nous identifierons à $\mathbf{R}^{N-1}$.

Théorème 6 (*de trace*) Il existe une application linéaire continue, appelée trace et notée :

$$\gamma_0 : H^1(\mathbf{R}_+^N) \rightarrow H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1});$$

qui prolonge l'application restriction usuelle pour les fonctions continues. Cette application est surjective et son noyau est $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\mathbf{R}_+^N)$.

Preuve. Soit $v \in C_c^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^N})$, on a

$$|v(x', 0)|^2 = -2 \int_0^{+\infty} v(x', x_N) \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) dx_N,$$

en utilisant l'inégalité $2ab \leq (a^2 + b^2)$, on a

$$|v(x', 0)|^2 \leq 2 \int_0^{+\infty} (|v(x', x_N)|^2 + |\frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N)|^2) dx_N.$$

En intégrant par rapport à x' , on a

$$\int_{\mathbf{R}^{N-1}} |v(x', 0)|^2 dx' \leq 2 \int_{\mathbf{R}_+^N} (|v(x', x_N)|^2 + |\frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N)|^2) dx,$$

c'est à dire

$$\|v(x', 0)\|_{L^2(\mathbf{R}^{N-1})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbf{R}_+^N)}$$

Par densité de $C_c^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^N})$ dans $H^1(\mathbf{R}_+^N)$, on obtient la même inégalité pour $v \in H^1(\mathbf{R}_+^N)$

$$\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\mathbf{R}^{N-1})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbf{R}_+^N)}$$

En utilisant la transformée de Fourier par rapport à x' , on montre que (voir [DL, Vol. 3])

$$\|\gamma_0(v)\|_{H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbf{R}_+^N)}$$

de plus γ_0 est surjective.

La définition de l'espace de Soolev $H^s(\mathbf{R}^N)$, avec s réel, sera donnée en Annexe. $\square$

Cas d'un ouvert Ω

Pour définir la trace d'une fonction sur le bord d'un ouvert de classe C^1 , on introduit une partition de l'unité et un système de cartes locales pour se ramener au cas du demi-espace que nous venons de traiter. Nous n'écrirons pas en détails cette démarche et ne donnons que le résultat (voir [4]):

Théorème 7 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . Alors, il existe une unique application (linéaire continue) définie de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et tel que*

$$\gamma_0(u) = up.p. \text{ sur } \Gamma, \text{ si } u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),$$

de plus $Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.

Formule de Green

Le théorème suivant généralise la propriété d'intégration par parties des fonctions régulières.

Théorème 8 (*Intégration par parties*) Soit Ω est un ouvert borné à frontière régulière, alors, pour tout $i = 1; \dots; N$, on a

$$\int_{\Omega} u D_i v dx = - \int_{\Omega} u D_i v dx + \int_{\Gamma} \gamma_0 u(y) \gamma_0 v(y) n_i(y) d\gamma(y); \forall (u; v) \in (H^1(\Omega))^2$$

où $\gamma_0 u$ désigne la trace de u sur la frontière Γ et $d\gamma(y)$ désigne l'intégration par rapport à la mesure surfacique sur Γ (qu'on peut voir comme une mesure de Lebesgue $(N - 1)$ - dimensionnelle), et $n = (n_1; \dots; n_N)$ est la normale à Γ extérieure à Ω .

Preuve. Rappelons que la formule a été établie pour les fonctions de classe C^1 , on utilise la densité de $C^1(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$. Pour plus de détails voir [2], chapitre 4 . $\square$

Théorème 9 (*Formule de Green*) Soit Ω un ouvert de classe C^1 dans R^N tel que Γ soit bornée où bien $\Omega = \mathbf{R}_+^N$. Alors, pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma$$

Précisons une fois encore que dans l'intégrale de bord, il faut comprendre $\gamma_0(u)$ pour u (la trace de u) sur Γ et

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \sum_{i=1}^N \gamma_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) n_i \quad \text{où} \quad n = (n_1; \dots; n_N)$$

1.3 Espace $H^m(\Omega)$

1.3.1 Traces des éléments de $H^m(\Omega)$

Définition 4 $H_0^m(\Omega) = \text{Adh} D(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^m}$

Soit Ω un ouvert borné de classe C^2 de frontière $\partial\Omega = \Gamma$. Considérons les applications (restriction)

$$\begin{aligned}\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{\Gamma} \\ \gamma_1 : D(\bar{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ \varphi &\mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\Gamma}\end{aligned}$$

Théorème 10 *L'application*

$$\begin{aligned}\gamma : D(\bar{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\Gamma)^2 \\ u &\mapsto (u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma})\end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application continue de

$$H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)^2$$

- *De plus, $\text{Ker } \gamma = H_0^2(\Omega)$ et $\text{Im } \gamma = H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$*

Espace $\mathcal{H}^s(\mathbf{R}^N)$

Si $s \geq 0$, on définit les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire, ou réel,

$$\mathcal{H}^s(\mathbf{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^N), \hat{u} \in L_s^2(\mathbf{R}^N)\}$$

avec

$$L_s^2(\mathbf{R}^N) = \{v \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^N), (1 + |y|^2)^{s/2} v \in L^2(\mathbf{R}^N)\}$$

où $\hat{u}$ est la transformée de Fourier-Plancherel définie dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ par

$$\hat{u}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^N} u(x) e^{-ix \cdot y} dx$$

Si Γ est une sous-variété compacte, $H^s(\Gamma)$ est définie à l'aide de cartes locales [4].

1.3.2 Injections de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que lorsque l'exposant m est suffisamment grand, les fonctions de $H^m(\Omega)$ ont des propriétés de continuité

et de différentiabilité au sens classique. On commence par le cas $\Omega = \mathbf{R}^N$. Rappelons que pour k entier :

$$B^k(\mathbf{R}^N) := \{u \in C^k(\mathbf{R}^N) : \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |D^\alpha u(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbf{N}^N; |\alpha| \leq k\}$$

Cet espace est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{B^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |D^\alpha u(x)|$$

Nous pouvons énoncer un premier résultat :

Théorème 11 (de Morrey) Soient $s \in \mathbf{R}$ et $k \in N$ vérifiant $s > \frac{N}{2} + k$. Alors :

$$H^s(\mathbf{R}^N) \hookrightarrow B^k(\mathbf{R}^N) \text{ est continue}$$

Preuve. Montrons le résultat pour $k = 0$, c'est à dire que si $s > N/2$ alors l'injection $H^s(\mathbf{R}^N) \hookrightarrow B^0(\mathbf{R}^N)$ est continue. Soit $u \in H^s(\mathbf{R}^N)$, alors

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\widehat{u}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbf{R}^N} (1+|\xi|^2)^{s/2} (1+|\xi|^2)^{-s/2} |\widehat{u}(\xi)| d\xi \leq \|u\|_{H^s} \int_{\mathbf{R}^N} (1+|\xi|^2)^{-s/2} d\xi$$

L'intégrale du second membre est convergente si $s > \frac{N}{2}$, alors il existe $C = C(N, s) > 0$ tel que

$$\|\widehat{u}\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}, \forall u \in H^s(\mathbf{R}^N)$$

On sait d'après le cours d'analyse de Fourier que

$$\|u\|_{B^0} \leq \|\widehat{u}\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}$$

- Le cas général ($k \geq 1$) s'obtient en remarquant que

$$u \in H^s(\mathbf{R}^N) \Rightarrow D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbf{R}^N)$$

et $s - |\alpha| > N/2$ pour tout $|\alpha| \leq k$. □

On déduit de cette proposition :

Corollaire 1 Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$ borné et régulier (de classe C^m). Alors, pour tout $k \in N$ et pour tout $m \in N$ tel que $m > N/2 + k$, l'injection $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$ est continue.

Preuve. On peut prolonger toute fonction u de $H^m(\Omega)$ en une fonction $\bar{u} \in H^m(\mathbf{R}^N)$ (voir le théorème 5 de prolongement). Le théorème de Morrey affirme que $\bar{u} \in B^k(\mathbf{R}^N)$. On en déduit que $u \in C^k(\bar{\Omega})$.

1.4 Espace $H^{-1}(\Omega)$

Définition 5 $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)'$ dual topologique

$$f \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow \exists C \geq 0 \text{ tel que } | \langle f, \varphi \rangle | \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}, \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

muni de la norme duale

$$\|f\|_{H^{-1}} = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{|\langle f, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}}$$

Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut considérer que $H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$ avec injection i^* continue

$$f \rightarrow i^*(f) \text{ t.q. } \langle i^*(f), \varphi \rangle_{D', D} = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

$T = i^*(f)$ est une distribution d'ordre 1

Proposition 3

$$u \in H^{-1}(\Omega) \Leftrightarrow \exists g_i \in L^2(\Omega), i = 0, 1, \dots, N / u = g_0 + \sum_{i=1}^N D_i g_i$$

Preuve. Découle du théorème de Riesz, il existe $v \in H^1$ tel que

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = (v, \varphi)_{H^1} = (v, \varphi)_{L^2} + \sum_{i=1}^N (D_i v, D_i \varphi)_{L^2}$$

Posons $g_0 = v$, $g_i = -D_i v$, alors

$$\langle i^*(u), \varphi \rangle_{D', D} = (g_0, \varphi)_{L^2} + \sum_{i=1}^N (g_i, D_i \varphi)_{L^2}$$

d'où

$$u = g_0 + \sum_{i=1}^N D_i g_i, \text{ dans } D'$$

□

Chapitre 2

Résolution de problèmes aux limites elliptiques par la méthode variationnelle

2.1 Rappel: Théorème de Lax-Milgram

Rappelons le théorème de Lax-Milgram (voir [1]).

Hypothèses.

- V espace de Hilbert (réel)
- $a : V \times V \mapsto \mathbf{R}$ une forme bilinéaire continue
- $L \in V'$ une forme linéaire continue sur V .

Définition 6 *a est dite coercive (ou V - elliptique) s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que:*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V$$

Problème variationnel. Trouver $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V \tag{2.1}$$

Théorème 12 *(Théorème de Lax-Milgram) Si a est coercive, alors le problème (2.1) admet une solution unique. De plus l'application $L \rightarrow u$ solution de (2.1) est continue de $V' \rightarrow V$, plus précisément on a :*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'}$$

2.2 Problème de Dirichlet et de Neumann sur $I =]a, b[$

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $f \in L^2(I)$.

Considérons les problèmes aux limites du type *Dirichlet*

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(I) \\ -u'' + \lambda u = f, \text{ p.p } x \in I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

et du type *Neumann*

$$(N) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(I) \\ -u'' + \lambda u = f, \text{ p.p } x \in I \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2.1 Formulation variationnelle

Soit u solution de (2.2) ou (2.3), alors

$$\forall v \in H^1(I), \quad - \int_I u'' v dx = \int_I u' v' dx - [u'v]_0^1$$

Soit la forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, V sous-espace fermé de $H^1(I)$, définie par

$$a(u, v) = \int_I (u' v' + \lambda u v) dx$$

Donc le problème (2.2) est équivalent au problème variationnel

$$(DV) \quad \exists u \in H_0^1(I), \forall v \in H_0^1(I), a(u, v) = (f, v)_{L^2(I)} \quad (2.4)$$

le problème (2.3) est équivalent au problème variationnel

$$(NV) \quad \exists u \in H^1(I), \forall v \in H^1(I), a(u, v) = (f, v)_{L^2(I)} \quad (2.5)$$

Proposition 4 *Si $\lambda > 0$, les problèmes (2.4) et (2.5) admettent une solution unique.*

Preuve. On applique le théorème de Lax-Milgram dans le cas $V = H_0^1(I)$ pour (D) et $V = H^1(I)$ pour (N). Remarquons que $a(u, v)$ est coercive avec une constante $\alpha = \min(1, \lambda)$. $\square$

Théorème 13 *Le problème (D) (resp (N)) est équivalent à (DV) (resp. (NV)).*

Preuve. On a déjà vu que $(D) \Rightarrow (DV)$ (resp. $(N) \Rightarrow (NV)$). Montrons la réciproque. $D(I) \subset V$, alors

$$\forall \varphi \in D(I), a(u, \varphi) = \int_I f u dx$$

entraîne $u \in H^2(I)$ et

$$-u'' + \lambda u = f, \text{ p.p. } x \in I \quad (2.6)$$

La condition limite pour (D) est satisfaite car $u \in H_0^1(I)$. Pour (N), on intègre par parties dans (NV) , ce qui donne avec l'équation différentielle (2.6)

$$u'(1)v(1) = u'(0)v(0), \forall v \in H^1(I).$$

En choisissant $v(0) = 1$ et $v(1) = 0$, on déduit $u'(0) = 0$, puis $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$, on déduit $u'(1) = 0$. $\square$

Remarque 2 Cas $\lambda = 0$.

- Pour (D) on a existence et unicité car a est coercive d'après l'inégalité de Poincaré $\forall v \in H_0^1(I), \|v'\|_{L^2} \geq C\|v\|_{L^2}^2$.
- Pour (N), la solution n'est pas unique ($u = u_0 + c$ définie à une constante près)

2.3 Problèmes elliptiques en dimension $N \geq 2$

2.3.1 Problèmes de Dirichlet homogène

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ . Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $c(x) \in L^\infty(\Omega)$. Considérons le problème de Dirichlet suivant

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \\ -\Delta u + c(x)u = f, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ u(x) = 0, x \in \Gamma \end{cases} \quad (2.7)$$

Supposons que u est une solution de (2.7) et $v \in H^1(\Omega)$, on multiplie l'EDP par v et on intègre sur Ω , alors

$$\int_{\Omega} (-\Delta u v + c(x)u v) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \gamma_1(u) \gamma_0(v) ds = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \quad (\text{car } \gamma_0(v) = 0)$$

D'où la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \quad (2.8)$$

où on a posé

$$\begin{aligned} - V &= H_0^1(\Omega) \\ - a(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + c(x)uv) dx \\ - L(v) &= \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

Proposition 5 *Soit $u \in H^2(\Omega)$. Alors u est solution de (2.7) si et seulement si u solution de (2.8)*

Preuve. On a déjà vu que (2.7) $\Rightarrow$ (2.8). Montrons la réciproque. Soit u solution de (2.8) et $\varphi \in D(\Omega)$, alors

$$\sum_{i=1}^N (D_i u, D_i \varphi)_{L^2} + (cu, \varphi)_{L^2} = (f, \varphi)_{L^2}$$

ce qui montre que

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{dans } D'(\Omega)$$

Donc presque partout. La condition $\gamma_0(u) = 0$ est satisfaite car $u \in H_0^1(\Omega)$.

□

Remarque 3 *Il n'est pas nécessaire de supposer que $u \in H^2(\Omega)$, dans ce cas l'EDP est satisfaite au sens très faible (dans D'). Si Ω est régulier (de classe C^1), on peut montrer que $u \in H^2$.*

Pour l'existence de la solution faible de (2.8), on vérifie les hypothèses du théorème de L-M, en particulier la coercivité de $a(u, v)$.

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \|\nabla v\|_{L^2}^2 + c_- \|v\|_{L^2}^2 \quad \text{avec } c_- = \inf_{x \in \Omega} c(x) \\ &\geq \alpha \|\nabla v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1}{2}(1 + c_p^2 c_-) > 0$ si $\|c\|_\infty < c_p$ avec c_p la constante de Poincaré. On vient à démontrer le théorème

Théorème 14 *Il existe $c_0 \in \mathbf{R}$ tel que, si $c(x) \geq c_0$, alors le problème variationnel (2.8) admet une solution unique. De plus $\|u\|_{H^1} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2}$.*

2.3.2 Problèmes de Dirichlet non homogène

Considérons le problème de Dirichlet non homogène

$$(DNH) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \\ -\Delta u + c(x)u = f, \text{ p.p } x \in \Omega \\ \gamma_0(u) = g, g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases} \quad (2.9)$$

Considérons un relèvement de g , c'est à dire il existe $G \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0(G) = g \Leftrightarrow G = R_0(g)$.

Par un changement d'inconnue $\tilde{u} = u - G$, on transforme ce problème en un problème homogène

$$(\tilde{D}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in H^2(\Omega) \\ -\Delta \tilde{u} + c(x)\tilde{u} = F, \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow D' \\ \gamma_0(\tilde{u}) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Avec le second membre $F = f - cG - \Delta G$ vérifiant

$$\|F\|_{H^{-1}} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|G\|_{H^1}) \leq C(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{1/2}}) \quad (2.11)$$

Le théorème de L-M s'applique donc et on a l'inégalité de stabilité

$$\|u\|_{H^1} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{1/2}})$$

2.3.3 Problèmes de Neumann non homogène

Considérons le problème de Neumann non homogène

$$(NNH) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \\ -\Delta u + c(x)u = f, \text{ p.p } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x), g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases} \quad (2.12)$$

Formulation variationnelle

Soit $v \in H^1(\Omega)$, en appliquant la formule de Green, on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \gamma_1(u) \gamma_0(v) ds = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} g v ds$$

D'où la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \quad (2.13)$$

où on a posé

$$\begin{aligned} - V &= H^1(\Omega) \\ - a(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + c(x)uv) dx \\ - L(v) &= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v ds \end{aligned}$$

Théorème 15 *Supposons que $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$. Supposons qu'il existe $c_0 > 0$ tel que, si $c(x) \geq c_0$. Alors le problème variationnel (2.13) admet une solution unique. Par ailleurs il existe $C \geq 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^1} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2})$$

Preuve.

- L est continue: $|L(v)| \leq (\|f\|_0 \|v\|_0 + \|g\|_0 \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)}) \leq C(\|f\|_0 + \|v\|_1)$
- a est continue: $|a(u, v)| \leq \max(1, c_{\infty}) \|u\|_1 \|v\|_1$ ($c_{\infty} = \sup |c(x)|$)
- a est coercive: $a(v, v) \geq \min(1, c_0) \|v\|_1^2$

□

Equivalence avec (2.12)

Soit u solution de (2.13) et $\varphi \in D(\Omega)$, alors

$$\langle -\Delta u + cu - f, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow -\Delta u + cu = f \text{ au sens de } D'$$

si Ω est régulier ceci implique $u \in H^2$ et l'EDP est vérifiée presque partout. On applique la 1^{ère} formule de Green

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v ds$$

et comparant avec (2.12) on a

$$\int_{\Gamma} (\gamma_1 u - g) v ds = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

et comme $H^{1/2}(\Gamma)$ est dense dans $L^2(\Gamma)$ on déduit que

$$\gamma_1(u) = g \quad \text{dans } L^2(\Gamma)$$

Remarque 4 Si $c = 0$ il n'existe une solution que si f et g vérifient la condition de compatibilité

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g ds = 0.$$

Remarquons aussi que si u est solution alors $u + C$, avec $C \in \mathbf{R}$, est aussi une solution.

2.3.4 Autres exemples

Problème mixte (mêlé)

$$(D - N) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u + \lambda u = f, \text{ p.p } x \in \Omega \\ \gamma_0(u)|_{\Gamma_0} = 0, \gamma_1(u)|_{\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0} = g \end{cases} \quad (2.14)$$

- $V = H^1(\Omega, \Gamma_0) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0(u)|_{\Gamma_0} = 0\}$ sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.
- muni de la norme équivalente $\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$.
- Inégalité de Poincaré-Frederich ([1]): si Ω est connexe et $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$, alors

$$\exists C \geq 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)})$$

D'où la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \quad (2.15)$$

où on a posé

$$- V = H^1(\Omega, \Gamma_0)$$

$$\begin{aligned}
- a(u,v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \lambda uv) dx \\
- L(v) &= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} g v ds
\end{aligned}$$

Si $\lambda \geq 0$, on a existence, unicité et stabilité (pour les détails, voir la série d'exercices N° 3)

Problème de Robin

$$(Robin) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u + \lambda u = f, \text{ p.p } x \in \Omega \\ \gamma_1(u) + \alpha \gamma_0(u)|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

– Formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V, a(u,v) = L(v) \quad (2.17)$$

où on a posé

$$\begin{aligned}
- V &= H^1(\Omega) \\
- a(u,v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \lambda uv) dx + \alpha (\gamma_0(u), \gamma_0(v))_{L^2(\Gamma)} \\
- L(v) &= \int_{\Omega} f v dx
\end{aligned}$$

Si $\lambda > 0$ et $\alpha \geq 0$, on a existence, unicité et stabilité (pour les détails, voir la série d'exercices N° 3)

2.3.5 Problèmes elliptiques du second ordre

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, ($N \geq 1$), de frontière Γ . Soient $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1; \dots; N$. On suppose que les fonctions a_{ij} vérifient l'hypothèse d'ellipticité uniforme, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha > 0; \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad p.p. \text{ dans } \Omega$$

On se donne $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$, et on cherche une solution au problème :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} Pu := - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j u)(x) = f(x), x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), x \in \Gamma. \end{cases} \quad (2.18)$$

où $\partial_i u$ désigne la dérivée partielle de u par rapport à sa i -ème variable.

Définition 7 (*Solution classique*) On suppose que $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ pour tout $i, j = 1; \dots; N$. On suppose que $f \in C(\bar{\Omega})$ et $g \in C(\Gamma)$. On appelle alors solution classique de (2.18) une fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (2.18).

Il n'existe pas forcément de solution classique à (2.18). Mais il existe des solutions en un sens plus faible que l'on va définir ci-après.

Formulation faible du problème (2.18)

Problème de Dirichlet

On suppose que $g = 0$.

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \quad (2.19)$$

où on a posé

$$\begin{aligned} - V &= H_0^1(\Omega) \\ - a(u, v) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_j u(x) \partial_i v(x) \right) dx \\ - L(v) &= \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

Problème de Neumann

$V = H^1(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$. La condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n_A} \Big|_{\Gamma} = g,$$

où $\frac{\partial u}{\partial n_A}$ est la dérivée conormale (oblique) définie comme suit:

$$\begin{aligned} - \text{on pose } X &= A(x) \nabla u = (X_i) \Leftrightarrow X_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) D_j u(x), \\ - X &\in H^1 \text{ si } u \in H^2 \text{ et } a_{ij} \in C^1(\Omega). \\ - \text{Div } X &= f \in L^2 \end{aligned}$$

– Formule de Green: $\int_{\Omega} \text{Div} X v \, dx = \int_{\Omega} X \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} X \cdot n \, v \, ds.$

On pose $X \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n_A}.$

Ce qui justifie la formulation faible

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \quad (2.20)$$

où on a posé

– $V = H^1(\Omega)$

– $a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_j u(x) \partial_i v(x) \right) dx$

– $L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds$

Théorème 16 *Le problème (2.19) ou (2.20) possède une solution unique.*

Remarque 5 – Si $u \in H^1(\Omega, \Delta) = \{v \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ alors la trace normale $\gamma_1(u)$ existe comme est un élément de $H^{-1/2}(\Gamma)$ et on a la formule de Green généralisée

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \langle \gamma_1(u), v \rangle_{-1/2, 1/2}.$$

– De même, Si $u \in H^1(\Omega, P) = \{v \in H^1(\Omega); Pu \in L^2(\Omega)\}$ alors la trace conormale $\frac{\partial u}{\partial n_A} = \gamma_0(A(x) \nabla u \cdot n)$ existe comme est un élément de $H^{-1/2}(\Gamma)$ et on a la formule de Green généralisée

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} P u v \, dx = a(u, v) - \langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, v \rangle_{-1/2, 1/2}.$$

2.3.6 Régularité de la solution faible

Pour la preuve de ces résultats je conseille le lecteur de consulter le livre de Brézis [1].

Théorème 17 *Supposons que $\Omega \in C^2$ et $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $-\Delta u + u = f$ appartient à $H^2(\Omega)$ et $\|u\|_{H^2} \leq \|f\|_{L^2}.$*

Théorème 18 *(Among-Douglas-Nirenberg) Supposons que $\Omega \in C^{m+2}$ et $f \in H^m(\Omega)$, alors la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $-\Delta u + u = f$ appartient à $H^{m+2}(\Omega)$ et $\|u\|_{H^{m+2}} \leq \|f\|_{H^m}.$*

Théorème 19 *Supposons que $\Omega \in C^2$, $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ et $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $-\text{Div}(A(x)\nabla u) = f$ appartient à $H^2(\Omega)$ et $\|u\|_{H^2} \leq \|f\|_{L^2}$.*

Bibliographie

- [1] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris (1983).
- [2] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation (chapitres 3,4 et 5)
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/livre2.html>
- [3] Thierry Gallouët, Raphaële Herbin, Equations aux dérivées partielles, Master 2 de mathématiques , Université Aix Marseille (2018)
<https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/master2.d/M2edp.pdf>
- [4] R. Dautray, et J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 3, Transformations, Sobolev, Opérateurs, Masson, Paris, 1988.
- [5] R. Dautray, et J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Vol. 4, Méthodes variationnelles, Masson, Paris, 1988.
- [6] A. Munnier, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivés partielles. Université de Nancy, Institut Elie Cartan, 2007-2008